



**INAOE**

## **Sincronización de sistemas caóticos fraccionarios**

Jessica Zaqueros-Martínez, Gustavo Rodríguez-Gómez,  
Esteban Tlelo-Cuatle, Felipe Orihuela-Espina

Reporte Técnico No. CCC-20-003  
30 de Junio de 2020

©Coordinación de Ciencias Computacionales  
INAOE

Luis Enrique Erro 1  
Sta. Ma. Tonantzintla,  
72840, Puebla, México.



## Resumen

Los sistemas caóticos son difíciles de sincronizar debido a la alta sensibilidad en las condiciones iniciales. En la literatura existen diversas propuestas que muestran la factibilidad de sincronizar sistemas caóticos eligiendo un control apropiado. Dicha elección depende de las características del sistema como la presencia de atractores ocultos. En este trabajo se aborda el problema de la sincronización de sistemas caóticos continuos fraccionarios con atractores ocultos sin puntos de equilibrio mediante control difuso. Se hipotetiza que realizar la sincronización de sistemas caóticos fraccionarios sin puntos de equilibrio con atractores ocultos mediante control difuso es eficaz y robusta respecto a otras técnicas de control. El objetivo de esta investigación es sincronizar sistemas caóticos fraccionarios sin puntos de equilibrio con atractores ocultos a través de técnicas de control difuso basado en un análisis de estabilidad. Como avances preliminar, se sincronizaron mediante este control tres sistemas caóticos de orden entero de manera exitosa. Uno de estos sistemas cuenta con atractores ocultos y, a nuestro conocimiento, no había sido sincronizado exitosamente. Los resultados alcanzados muestran la factibilidad de sincronizar sistemas caóticos con atractores ocultos mediante control difuso donde fallan otras estrategias de control. En cuanto a la integración numérica de sistemas fraccionarios, se seleccionó un método de integración numérica con el que se realizaron tres experimentos. El objetivo del primer experimento fue familiarizarnos con las rutinas de integración, mientras que en el segundo experimento integramos numéricamente un sistema fraccionario caótico, y en el tercero integramos un sistema fraccionario caótico con atractores ocultos. Con estos experimentos se muestra la factibilidad de que el método numérico seleccionado podría servirnos para integrar sistemas caóticos fraccionarios con atractores ocultos. Además, se integraron numéricamente sistemas caóticos de orden entero con atractores ocultos con un método numérico basado en polinomios trigonométricos. Las integraciones numéricas fueron exitosas. En conclusión, se proporciona evidencia que el control difuso permite sincronizar sistemas caóticos con atractores ocultos, que se cuenta con un método numérico que podría integrar sistemas caóticos fraccionarios y que se tiene un método numérico que permite integrar sistemas caóticos enteros con atractores ocultos. La principal contribución de este trabajo será proporcionar una metodología para sincronizar sistemas de orden fraccionario sin puntos de equilibrio con atractores ocultos mediante control difuso.

**Palabras clave:** Sistemas caóticos, sistemas fraccionarios, sincronización, atractores ocultos, control difuso.

## Abstract

Chaotic systems are difficult to synchronize due to the high sensitivity to initial conditions. Literature show the feasibility of synchronizing chaotic systems selecting a suitable control. Such choice is influenced by the features of the chaotic system such as the presence of hidden attractors. This work will address the problem of synchronizing continuous chaotic fractional systems with hidden attractors without equilibrium points using fuzzy control. It is hypothesized that synchronizing fractional chaotic systems without equilibrium points with hidden attractors by fuzzy control is efficient and robust compared to other control approaches. The objective of this research is to synchronize fractional chaotic systems without equilibrium points with hidden attractors through fuzzy control techniques based on stability analysis. As preliminary advance, three chaotic systems of integer order were successfully synchronized by this control. One of these systems features hidden attractors and, to our knowledge, it had not been successfully synchronized before. The results achieved show the feasibility of synchronizing chaotic systems with hidden attractors through fuzzy control where other control strategies fail. Concerning the numerical integration of fractional systems, a numerical integration method was selected. Three experiments were executed with this numerical method. The objective of the first experiment was to familiarize ourselves with the integration routines. In the second experiment we numerically integrated a chaotic fractional system. In the third experiment, we integrated a chaotic fractional system with hidden attractors. These experiments show the feasibility that the selected numerical method could be used to integrate fractional chaotic systems with hidden attractors. In addition, chaotic integer order systems with hidden attractors were numerically integrated with a numerical method based on trigonometric polynomials. All numerical integrations were successful. In conclusion, evidence is provided that fuzzy control allows chaotic systems to be synchronized with hidden attractors, that we have a numerical method that could integrate fractional chaotic systems, and we have a numerical method that allows integer chaotic systems to be integrated with hidden attractors. The main contribution of this work will be to provide a methodology to synchronize fractional order systems without equilibrium points with hidden attractors by fuzzy control.

**Keywords:** Chaotic systems, fractional systems, synchronization, hidden attractors, fuzzy control

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Motivación . . . . .	1
1.2	Justificación . . . . .	3
1.3	Planteamiento del problema . . . . .	3
1.4	Preguntas de investigación . . . . .	5
1.5	Objetivo general . . . . .	5
1.5.1	Objetivo particulares . . . . .	5
1.6	Hipótesis . . . . .	6
1.7	Contribución . . . . .	6
1.8	Alcances . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Marco teórico</b>	<b>7</b>
2.1	Caos . . . . .	7
2.2	Derivadas fraccionarias . . . . .	9
2.3	Sistemas dinámicos utilizados . . . . .	10
2.3.1	Sistema hipercaótico de Rossler . . . . .	10
2.3.2	Sistema caótico de Chua . . . . .	10
2.3.3	Sistema caótico de Wei . . . . .	10
2.3.4	Sistema caótico sin puntos de equilibrio de Sprott A . . . . .	10
2.3.5	Sistema de Azar . . . . .	11
2.3.6	Sistema caótico con un término exponencial . . . . .	11
2.3.7	Sistema caótico tipo Lorenz . . . . .	11
2.3.8	Sistema no lineal de <i>Brusseletor</i> . . . . .	11
2.3.9	Sistema caótico fraccionario del dinamo . . . . .	12
2.3.10	Sistema caótico fraccionario con atractores ocultos de Borah . . . . .	12
2.4	Lógica difusa . . . . .	12
2.4.1	Modelado difuso . . . . .	13
2.5	Propiedades de matrices . . . . .	16
2.6	Tipos de sincronización . . . . .	17
2.7	Teoría de estabilidad . . . . .	18
2.7.1	Teoría de estabilidad lineal . . . . .	19
2.7.2	Teoría de estabilidad de Lyapunov . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Estado del arte</b>	<b>22</b>
3.1	Técnicas de sincronización . . . . .	22
3.1.1	Sistemas fraccionarios con atractores ocultos . . . . .	33
3.2	Evolución del control difuso en la sincronización de sistemas caóticos . . . . .	34

3.3	Sumario . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Propuesta de investigación</b>	<b>37</b>
4.1	Metodología . . . . .	37
4.2	Plan de trabajo . . . . .	40
4.3	Plan de publicaciones . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Resultados preliminares</b>	<b>43</b>
5.1	Control difuso . . . . .	43
5.1.1	Sincronización difusa . . . . .	43
5.1.2	Resultados y análisis . . . . .	45
5.2	Integración numérica de sistemas fraccionarios . . . . .	52
5.2.1	Resultados y análisis . . . . .	52
5.3	Integración numérica de sistemas caóticos con atractores ocultos . . . . .	56
5.3.1	Sistema caótico de Wei . . . . .	56
5.3.2	Sistema caótico de Sprott A . . . . .	56
5.3.3	Sistema caótico de Azar . . . . .	57
5.3.4	Sistema caótico con un término exponencial . . . . .	57
5.3.5	Sistema caótico tipo Lorenz . . . . .	58
	<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

# Índice de figuras

1.1	Taxonomía de los sistemas caóticos . . . . .	2
1.2	Esquema general de comunicación segura basada en caos . . . . .	3
1.3	Taxonomía del control de caos . . . . .	4
1.4	Técnicas de control . . . . .	5
2.1	Ejemplo de un atractor extraño . . . . .	8
2.2	Dependencia sensible a las condiciones iniciales . . . . .	9
2.3	Diagrama general de un sistema lógico difuso . . . . .	14
2.4	Sistema de control en lazo cerrado . . . . .	19
3.1	Taxonomía de las técnicas de sincronización . . . . .	23
3.2	Tipos de sincronización utilizadas con control difuso . . . . .	36
4.1	Esquema de sincronización . . . . .	38
4.2	Áreas de conocimiento . . . . .	39
4.3	Metodología . . . . .	40
4.4	Calendario de actividades . . . . .	42
5.1	Esquema de sincronización . . . . .	45
5.2	Espacio de fase del sistema hipercaótico de Rossler . . . . .	47
5.3	Errores de la sincronización del sistema hipercaótico de Rossler . . . . .	48
5.4	Espacio de fase del sistema de Chua clásico . . . . .	49
5.5	Errores de la sincronización del sistema caótico de Chua clásico . . . . .	50
5.6	Espacio de fase del sistema de Chua con atractores ocultos . . . . .	51
5.7	Errores de la sincronización del sistema caótico de Chua con atractores ocultos . . . . .	52
5.8	Solución numérica del sistema de <i>Brusselator</i> . . . . .	53
5.9	Solución numérica del sistema del dinamo . . . . .	54
5.10	Solución numérica del sistema caótico fraccionario con atractores ocultos . . . . .	55
5.11	Solución numérica del sistema de Wei . . . . .	56
5.12	Solución numérica del sistema de Sprott A . . . . .	57
5.13	Solución numérica del sistema de Azar . . . . .	58
5.14	Solución numérica del sistema caótico con un término exponencial . . . . .	58
5.15	Solución numérica del sistema caótico tipo Lorenz . . . . .	59

# Índice de Tablas

3.1	Técnicas de control . . . . .	25
3.2	Tipos de sincronización . . . . .	27
3.3	Características de los sistemas sincronizados . . . . .	28
3.4	Tiempos de los sistemas sincronizados . . . . .	29
3.4	Continuación de la tabla . . . . .	30
3.4	Continuación de la tabla . . . . .	31
3.4	Continuación de la tabla . . . . .	32
3.5	Estudios con atractores ocultos . . . . .	33
3.6	Evolución del control difuso . . . . .	35
3.7	Características de los sistemas fraccionarios caóticos sincronizados mediante control difuso . . . . .	36
5.1	Características de los sistemas sincronizados . . . . .	51
5.2	Características de los sistemas fraccionarios integrados numéricamente . . . . .	55
5.3	Características de los sistemas caóticos con atractores ocultos integrados numéricamente . . . . .	59





# Capítulo 1

## Introducción

Los sistemas caóticos son sistemas dinámicos no lineales completamente deterministas y altamente sensibles a las condiciones iniciales. A finales del siglo XIX, Henri Poincaré fue el primero en observar la existencia de caos al estudiar la estabilidad del sistema solar. Desde entonces importantes avances se han realizado en la teoría del caos y actualmente sigue siendo estudiada por sus aplicaciones en control, ingeniería biomédica, comunicación segura, optimización, cuántica y criptografía, entre otras (Çavuşoğlu et al., 2019).

### 1.1 Motivación

Los sistemas caóticos pueden ser de tiempo continuo o discreto. Las razones para emplear unos u otros se justifican por las aplicaciones que éstos tienen. Por ejemplo, en criptografía, se utilizan los sistemas caóticos discretos de baja dimensión porque permiten que los algoritmos de cifrado realicen un procesamiento más rápido. Por otro lado, los sistemas caóticos continuos tienen estructuras más complejas y, por tanto, las propuestas de diseño basadas en éstos son más difíciles de descifrar (Özkaynak, 2018).

Otra clasificación que se presenta en los sistemas caóticos está relacionada al orden: pueden ser de orden entero o fraccionario. Existen diferencias sustanciales entre los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (orden entero) y los correspondientes sistemas de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. La mayoría de las propiedades o conclusiones de los sistemas de orden entero no pueden ser simplemente extendidas al caso de los sistemas fraccionarios (Wu et al., 2012), por lo que su estudio desde el punto de vista teórico es fundamental. Además, el cálculo fraccionario proporciona un extenso abanico de maneras que permiten describir objetos y sistemas reales de forma más precisa y adecuada que el cálculo de orden entero (Lin and Lee, 2011; Muthukumar et al., 2016; Zhou et al., 2019a).

A pesar de que el cálculo fraccionario tiene 300 años de historia, sólo en años recientes los investigadores se han interesado en sus aplicaciones. Muchos sistemas en campos de estudio como comunicaciones, física, biología, química, meteorología y economía (Li and Wu, 2019) pueden ser elegantemente descritos con derivadas fraccionarias. Además, reportan que la dinámica de los sistemas fraccionarios tiene características más complejas y mayor sensibilidad en los parámetros del

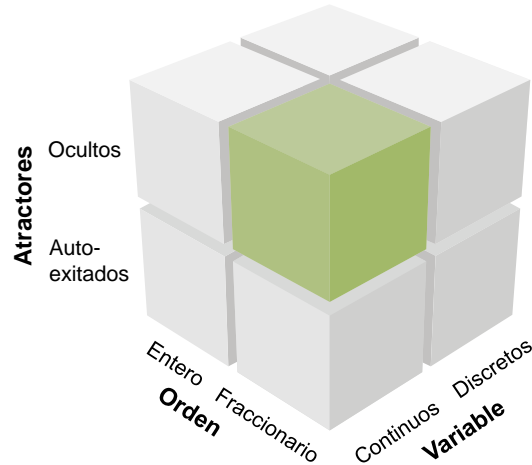


Figura 1.1: Taxonomía de los sistemas caóticos. En el recuadro verde se encuentra este trabajo de investigación.

sistema comparada con la dinámica de los sistemas enteros (Zhou et al., 2019a). En particular, los sistemas fraccionarios pueden proporcionar un mayor número de parámetros clave y presentar un mejor rendimiento para aplicaciones prácticas, como la comunicación segura y el cifrado de información digital (Zheng Guang-Chao Liu Chong-Xin, 2018; Kingni et al., 2017; Yan et al., 2019a). Con lo anterior, se muestra la importancia de considerar y analizar sistemas dinámicos de orden fraccionario.

Aparte de las características anteriormente mencionadas, los sistemas caóticos también tienen atractores, los cuales son un conjunto de puntos que reflejan la dinámica del sistema. Los atractores pueden ser auto-excitados u ocultos. Durante los últimos años, gran atención se ha puesto en el estudio de los atractores ocultos debido a la dificultad para encontrarlos, su importancia en problemas teóricos y aplicaciones variadas en ingeniería.

Es importante conocer si un sistema tiene atractores ocultos, porque éstos pueden conducir a eventos catastróficos que van desde cambios climáticos repentinos o enfermedades graves hasta crisis financieras y desastres en dispositivos comerciales (Zelinka, 2016; Dudkowski et al., 2016; Pham et al., 2017b). Por ejemplo, el accidente del avión YF-22 Boeing causado por el cambio repentino del atractor oculto (Lauvdal et al., 1997; Dudkowski et al., 2016).

Es sabido que cerca de los puntos de equilibrio se presentan atractores (auto-excitados u ocultos), pero los atractores ocultos se pueden presentar en sistemas con y sin puntos de equilibrio. En consecuencia, si el sistema no tiene puntos de equilibrio, encontrar los atractores ocultos del sistema es más difícil que si tuviera puntos de equilibrio. Lo que se traduce en una ventaja más para los sistemas sin puntos de equilibrio en las aplicaciones prácticas como comunicaciones seguras (Borah and Roy, 2017).

En la figura 1.1 se presenta una taxonomía de los sistemas caóticos, mostrando las clasificaciones mencionadas anteriormente.

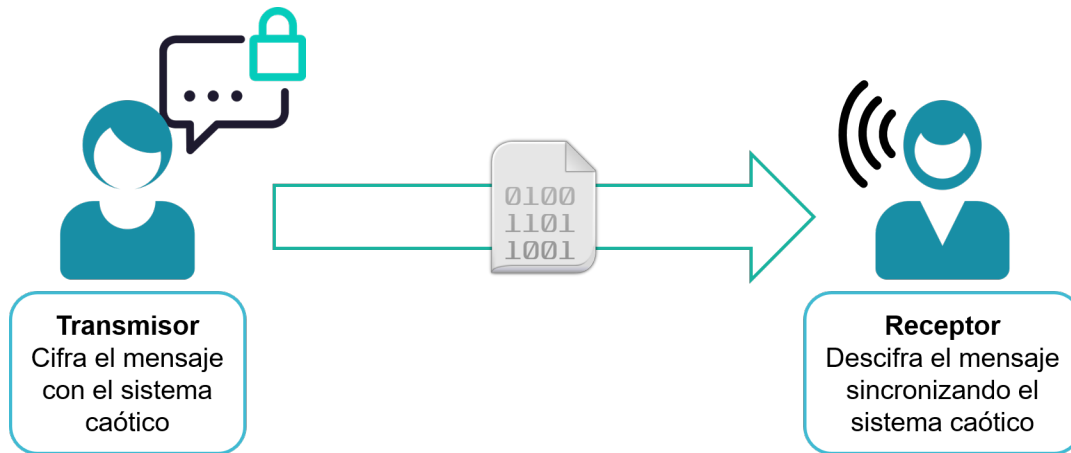


Figura 1.2: Esquema general de comunicación segura utilizando sincronización caótica.

## 1.2 Justificación

La teoría del caos es ampliamente estudiada por especialistas en el campo de control de caos. Este campo se puede dividir en dos áreas de investigación: supresión de caos y sincronización de caos. En las últimas décadas, la sincronización caótica se ha vuelto objeto de estudio debido a sus aplicaciones potenciales en disciplinas como reacciones químicas, convertidores de potencia, aeroespacio, procesamiento de señales, láseres físicos, comunicaciones seguras, sistemas satelitales y sistemas biológicos (Zhou and Zhu, 2017; Kumar et al., 2019).

La sincronización caótica consiste en hacer coincidir y converger en la misma trayectoria varios sistemas caóticos después de un tiempo suficiente (Bendoukha et al., 2019).

La idea general de la sincronización caótica utilizada en comunicaciones seguras es la siguiente. Primero, el transmisor cifra la información mediante un sistema caótico. Después, la información cifrada es enviada a través de un canal para ser recibida por el receptor. Finalmente, el receptor utiliza la sincronización para recuperar el mensaje original de la información cifrada. Un esquema general se muestra en la figura 1.2.

## 1.3 Planteamiento del problema

En el escenario donde existe un sistema maestro (o controlador) y un sistema esclavo (o respuesta) existen diversas propuestas para llevar a cabo la sincronización. Entre las cuales se encuentran la sincronización completa, completa inversa, proyectiva, proyectiva generalizada, híbrida proyectiva, anti-sincronización (ver figura 1.3), por mencionar algunas (Zhang et al., 2013; Pham et al., 2018; Boubellouta et al., 2019). Incluso diferentes tipos de sincronización pueden coexistir al sincronizar dos sistemas (Pham et al., 2018). Entre más complejo sea el tipo de sincronización, más adecuado es para su aplicación en comunicaciones seguras (Zhang et al., 2013).

Para llevar a cabo la sincronización caótica es necesario utilizar alguna técnica de control. En la figura 1.4 se muestran algunas de las técnicas de control que han sido utilizadas con sistemas de orden

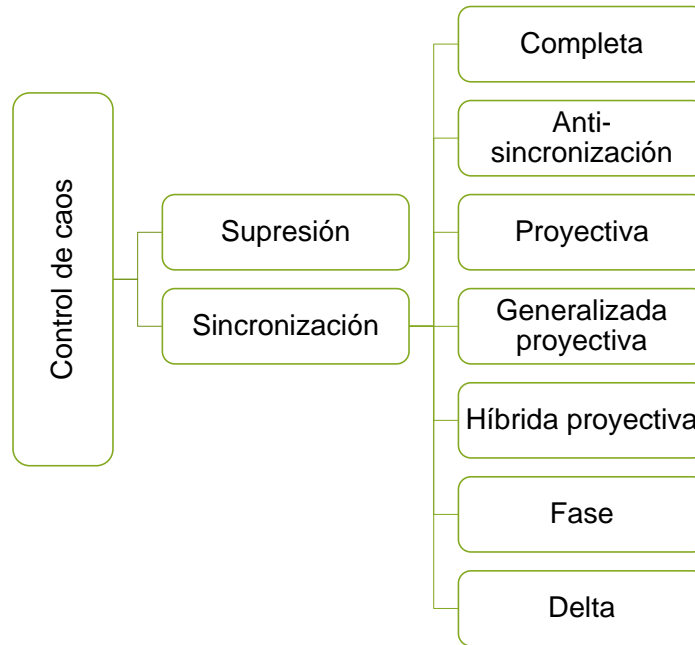


Figura 1.3: Taxonomía del control de caos. Se muestran los tipos de sincronización más utilizados.

entero y fraccionario. Para orden entero están el esquema de Pecora-Carroll, el esquema Ott, Grebogi y Yorke (OGY), el enfoque de control activo, control adaptativo y el control lineal y no lineal, entre otros (Bendoukha et al., 2019). Mientras que para los sistemas caóticos fraccionarios se ha empleado el método fraccionario de Lyapunov, la teoría de estabilidad lineal de sistemas fraccionarios, control deslizante, control adaptativo, control difuso y la teoría de estabilidad de tiempo finito, entre otros (Ouannas et al., 2018; Wu et al., 2012; Kumar et al., 2019; Muthukumar et al., 2018; Li and Wu, 2019; Boubellouta et al., 2019; Zheng et al., 2019).

Es importante resaltar que el control difuso se encuentra dentro de estas técnicas porque es una herramienta adecuada que simplifica los análisis matemáticos (Zhang et al., 2009) y es utilizada para aproximar funciones no lineales mediante funciones lineales (Zhou et al., 2019a; Kim et al., 2005). Entre las propuestas más recientes se encuentra el aprendizaje compuesto difuso (Boubellouta et al., 2019; Weng et al., 2019; Zhou et al., 2019b).

Hasta donde sabemos, nula atención se ha prestado a la sincronización de sistemas caóticos fraccionarios sin puntos de equilibrio con atractores ocultos mediante control difuso.

En este trabajo se abordará el problema de la sincronización de sistemas caóticos continuos de orden fraccionario con atractores ocultos sin puntos de equilibrio mediante control difuso. Los retos que se presentan son los siguientes: el primero es contar con un conjunto de sistemas con estas propiedades, el segundo es el tipo de sincronización del sistema caótico de orden fraccionario, el tercero es la elección de la definición de derivada fraccionaria puesto que existen varias y no son equivalentes, por último, la elección de la estrategia numérica para integrar el sistema caótico fraccionario.

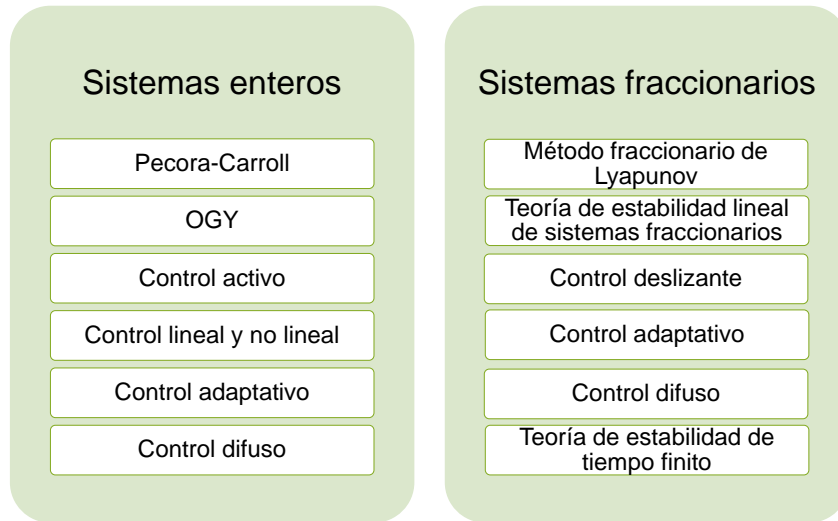


Figura 1.4: Técnicas de control utilizadas para llevar a cabo la sincronización caótica entre sistemas caóticos enteros o fraccionarios.

## 1.4 Preguntas de investigación

¿Qué tipo de sincronización se beneficia del mayor número de las características que presentan los sistemas caóticos fraccionarios con atractores ocultos?

¿Cómo encontrar si existe alguna influencia de los atractores ocultos en el diseño del control para llevar a cabo la sincronización caótica?

¿Qué ventajas podría proporcionar la sincronización por medio del control difuso respecto a otras técnicas de sincronización?

## 1.5 Objetivo general

Sincronizar sistemas caóticos de orden fraccionario sin puntos de equilibrio con atractores ocultos a través de técnicas de control difuso basado en un análisis de estabilidad.

### 1.5.1 Objetivo particulares

1. Identificar un conjunto de sistemas caóticos continuos de orden fraccionario con atractores ocultos.
2. Investigar los tipos de sincronización para seleccionar el más adecuado para aplicaciones de comunicación segura.
3. Analizar las definiciones de derivadas de orden fraccionario para seleccionar una.
4. Recopilar los métodos numéricos para integrar sistemas de orden fraccionario para elegir el más conveniente.

5. Realizar un análisis de estabilidad para diseñar el control difuso.
6. Sincronizar los sistemas caóticos seleccionados mediante el control diseñado difuso.
7. Evaluar la sincronización realizada.

## **1.6 Hipótesis**

Realizar la sincronización de sistemas caóticos de orden fraccionario sin puntos de equilibrio con atractores ocultos mediante control difuso es eficaz y robusta respecto a los trabajos que lo hacen con otras técnicas de control.

Entendiendo por eficaz la capacidad de lograr el efecto que se desea o se espera. En este caso: lograr la sincronización. En cuanto a la robustez, un sistema de control se dice robusto si exhibe el comportamiento deseado a pesar de la presencia de incertidumbres significativas en el sistema (Dorf and Bishop, 2005).

## **1.7 Contribución**

La principal contribución de este trabajo será proporcionar una metodología para sincronizar sistemas de orden fraccionario sin puntos de equilibrio con atractores ocultos mediante control difuso. Para lograrlo, se realizará un análisis de estabilidad utilizando alguna de las siguientes teorías: la teoría de estabilidad de Lyapunov o la fraccionaria.

## **1.8 Alcances**

Es importante mencionar que este trabajo de investigación está enfocado principalmente en la sincronización de sistemas caóticos fraccionarios y no en las aplicaciones prácticas.

# Capítulo 2

## Marco teórico

En esta sección se da una visión general de los conceptos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Para empezar, se proporcionan definiciones y conceptos de la teoría del caos y de la derivada fraccionaria. Así como los sistemas dinámicos utilizados en las pruebas realizadas en esta investigación. También se incluye un apartado dedicado a lógica difusa y al modelado difuso. Finalmente, se proporciona una recopilación de los diferentes tipos de sincronización encontrados en la literatura revisada.

### 2.1 Caos

El caos es una área de estudio en el campo de la *dinámica no lineal*, la cual forma parte de un campo de estudio más amplio: *los sistemas dinámicos*. Un sistema dinámico es aquél que evoluciona en el tiempo. Los sistemas dinámicos pueden ser estocásticos, los cuales evolucionan de acuerdo con algún proceso aleatorio como lanzar una moneda, o deterministas, en los que el futuro es determinado únicamente por el pasado de acuerdo con alguna regla o fórmula matemática (Sprott and Sprott, 2003). Los sistemas caóticos son sistemas dinámicos deterministas.

Puesto que no existe una definición ampliamente aceptada de caos, desde un punto de vista práctico, Parker and Chua (1989) lo definen como se presenta a continuación.

**Definición 1** *El caos se define como un comportamiento de estado estacionario acotado que no es un punto de equilibrio, ni periódico y tampoco cuasi periódico.*

Otras definiciones útiles son las que se dan a continuación.

**Definición 2** *Un estado es un punto en la solución que define completamente al sistema al tiempo  $t$  (Smith, 2007).*

**Definición 3** *El espacio de fase es el conjunto de todos los posibles estados de un sistema dinámico (Robinson, 2004).*

Los atractores extraños están presentes en los sistemas caóticos. Un ejemplo de un atractor extraño es el mostrado en la gráfica 2.1, el cual pertenece al sistema caótico de Chua. La definición de un atractor extraño se presenta a continuación.

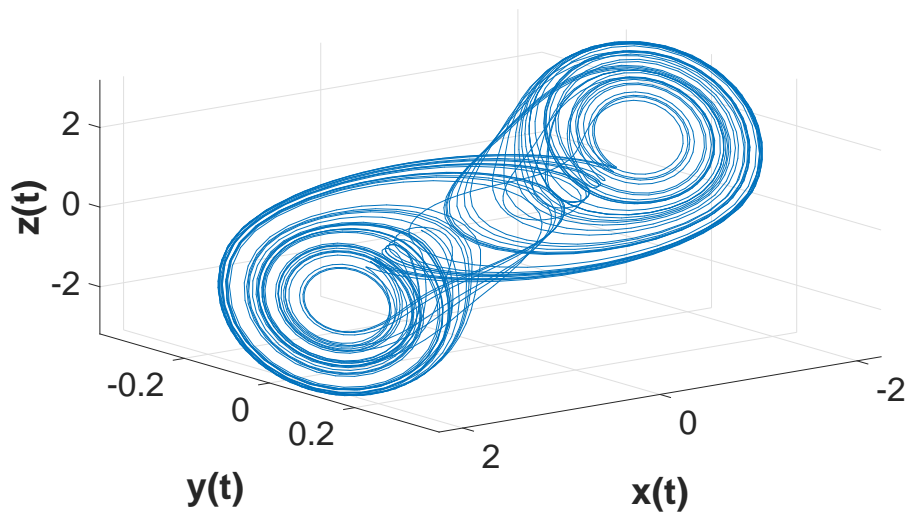


Figura 2.1: Atractor extraño del sistema caótico de Chua.

**Definición 4** *El objeto geométrico en el espacio de fase hacia donde todas las soluciones caóticas son atraídas es llamado **atractor extraño**. (Parker and Chua, 1989).*

Otra característica importante de los sistemas caóticos es la dependencia sensible a las condiciones iniciales. La cual a veces es utilizada como una condición suficiente para la presencia de caos, pero que un sistema tenga esta característica no implica que sea caótico (Drazin, 1992). En resumen, la dependencia sensible a las condiciones iniciales es una condición necesaria pero no suficiente para la presencia de caos. La definición de esta característica se da a continuación.

**Definición 5** *Dependencia sensible a las condiciones iniciales: dadas dos condiciones iniciales distintas, arbitrariamente cercanas entre sí, las trayectorias que emanan de estas condiciones iniciales divergen, a una razón característica del sistema, hasta que, a efectos prácticos, no están correlacionadas, (Parker and Chua, 1989).*

En la figura 2.2 se proporciona un ejemplo de dependencia sensible a las condiciones iniciales para el sistema caótico de Chua. Las condiciones iniciales son 0.7000 y 0.7001 para la variable de estado  $x$ , lo cual representa una diferencia de 0.01 %. Sin embargo, después de 15s las soluciones comienzan a divergir.

Además, para este trabajo de investigación, es importante definir a los atractores ocultos.

**Definición 6** *Un atractor es llamado auto-excitado si su cuenca de atracción interseca con cualquier vecindad abierta de un punto de equilibrio inestable. En otro caso es llamado **atractor oculto** (Dudkowski et al., 2016).*



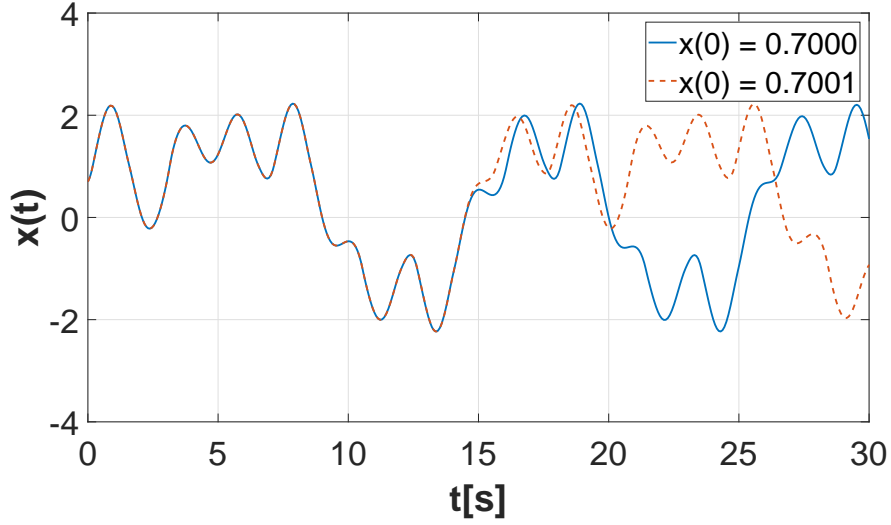


Figura 2.2: La dependencia sensible a las condiciones iniciales se ilustra con dos soluciones de la variable  $\mathbf{x}(t)$  del sistema caótico de Chua. Las condiciones iniciales solo difieren al 0.01 %, puesto que una es 0.7000 y la otra 0.7001. Sin embargo, después de 15s las soluciones comienzan a divergir.

## 2.2 Derivadas fraccionarias

Hoy en día existen diversas definiciones para las derivadas e integrales fraccionarias. Por lo que en esta sección se proporcionan las dos definiciones frecuentemente empleadas en estudios de sincronización: la de Caputo y la de Riemann–Liouville.

La derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$  de una función continua  $x$  está dada por

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{x^{(n)}(s)}{(t - s)^{\alpha+1-n}} ds, \quad n - 1 < \alpha < n \quad (2.1)$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  y se asume que el lado derecho está definido en cada punto sobre  $\mathbb{R}^+$  (Guerrero-Arroyo, 2015; Boubellouta et al., 2019). Además,  $\Gamma(\cdot)$  es la función dada por

$$\Gamma(P) = \int_0^\infty t^{P-1} e^{-t} dt, \quad \text{con } \Gamma(P + 1) = P\Gamma(P) \quad \text{con } P \in (0, \infty),$$

esta función es generalmente conocida como la función gama.

Por otro lado, la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville de orden  $\alpha$  de una función continua  $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  está dada por

$$D_*^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(s)}{(t - s)^{\alpha+1-n}} ds, \quad n - 1 < \alpha < n \quad (2.2)$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  y se asume que el lado derecho está definido en cada punto sobre  $\mathbb{R}^+$  (Guerrero-Arroyo, 2015).

## 2.3 Sistemas dinámicos utilizados

En la presente sección se proporcionan las ecuaciones matemáticas que modelan a los sistemas dinámicos utilizados en las pruebas realizadas en esta investigación.

### 2.3.1 Sistema hipercaótico de Rossler

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + \alpha y + w \\ \dot{z} = xz + \beta \\ \dot{w} = -0.5z + 0.05w \end{cases} \quad (2.3)$$

donde  $x, y, z, w$  son variables de estado,  $\alpha, \beta$  son parámetros (Zhang et al., 2005).

### 2.3.2 Sistema caótico de Chua

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - \psi(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -(\beta y + \gamma z) \end{cases} \quad (2.4)$$

donde  $\psi(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$ ,  $x, y, z$  son variables de estado,  $\alpha, \beta, \gamma$  son parámetros (Kiseleva et al., 2018).

### 2.3.3 Sistema caótico de Wei

La principal característica de sistema propuesto por (Wei, 2011) es que no tiene puntos de equilibrio:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = cx + z \\ \dot{z} = ay^2xz - d \end{cases} \quad (2.5)$$

donde  $x, y, z$ , son variables de estado,  $a, c, d$  son parámetros reales (Wei, 2011).

### 2.3.4 Sistema caótico sin puntos de equilibrio de Sprott A

Otro sistema que no tiene puntos de equilibrio es el dado por (Jafari et al., 2013):

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - zy \\ \dot{z} = y^2 - a \end{cases} \quad (2.6)$$

donde  $x, y, z$ , son variables de estado y  $a$  es un parámetro real (Jafari et al., 2013).

### 2.3.5 Sistema de Azar

El sistema proporcionado por Azar et al. (2017), es un sistema caótico sin puntos de equilibrio y las ecuaciones que lo describen son:

$$\begin{cases} \dot{x} = & y \\ \dot{y} = & Z \\ \dot{z} = & -a|x| - y + 3y^2 - xz - b \end{cases} \quad (2.7)$$

donde  $x, y, z$ , son variables de estado y  $a, b$  son parámetros positivos (Azar et al., 2017).

### 2.3.6 Sistema caótico con un término exponencial

El sistema caótico con un término exponencial proporcionado por Pham et al. (2015) que no tiene puntos de equilibrio, está modelado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = & a(y - x) \\ \dot{y} = & -by + xz + cw \\ \dot{z} = & d - e^{xy} \\ \dot{w} = & -mx \end{cases} \quad (2.8)$$

donde  $x, y, z, w$ , son variables de estado y  $a, b, c, d \neq 1, m$  son parámetros positivos (Pham et al., 2015).

### 2.3.7 Sistema caótico tipo Lorenz

El sistema tipo Lorenz presenta atractores ocultos de acuerdo con (Kuznetsov et al., 2016), y está dado por las siguientes ecuaciones :

$$\begin{cases} \dot{x} = & -\sigma(x - y) - ayz \\ \dot{y} = & rx - y - xz \\ \dot{z} = & -bz + xy \end{cases} \quad (2.9)$$

donde  $x, y, z$ , son variables de estado y  $\sigma = -ar, r, a$  son parámetros reales (Kuznetsov et al., 2016).

### 2.3.8 Sistema no lineal de *Brusseletor*

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} x = & A - (B + 1)x + x^2 z \\ D^{\alpha_2} z = & Bx - x^2 z \end{cases} \quad (2.10)$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2$  son los órdenes de las derivadas fraccionarias y  $A, B$  son parámetros del sistema (Garrappa, 2018).

Los sistemas fraccionarios se dirán **incommensurados** si  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , en caso contrario son llamados **commensurados**.

### 2.3.9 Sistema caótico fraccionario del dinamo

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = -\mu x_1 + x_2(x_3 + \gamma), \\ D^\alpha x_2 = -\mu x_2 + x_1(x_3 - \gamma), \\ D^\alpha x_3 = x_3 - x_1 x_2, \end{cases} \quad (2.11)$$

donde  $\alpha$  es el orden de la derivada fraccionaria y  $\mu$  y  $\gamma$  son parámetros del sistema (Boubellouta et al., 2019; Wang et al., 2009).

### 2.3.10 Sistema caótico fraccionario con atractores ocultos de Borah

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = a(x_2 - x_1) \\ D^\alpha x_2 = -bx_2 + mx_1 x_3 \\ D^\alpha x_3 = c - e^{x_1 x_2} \end{cases} \quad (2.12)$$

donde  $\alpha$  es el orden de la derivada fraccionaria y  $a$  y  $b$ ,  $c$  y  $m$  son parámetros del sistema (Borah et al., 2017).

## 2.4 Lógica difusa

La teoría de conjuntos difusos proporciona herramientas matemáticas para llevar a cabo procesos de razonamiento aproximado cuando la información disponible es incierta, incompleta, imprecisa o vaga. Mediante el concepto de grado de membresía se da una definición matemática de conjuntos difusos.

Los seres humanos realizan actividades que pueden ser clasificadas como control, por ejemplo andar en bicicleta. Estas actividades se aprenden a través de la experiencia, el sentido común y siguiendo reglas básicas de la forma *Si... entonces...*: Si la bicicleta se inclina a la derecha, entonces giramos la rueda hacia la izquierda.

La idea básica detrás del control difuso es utilizar reglas básicas de esta forma. Variables lingüísticas como rápido, lento, grande, mediano y pequeño son traducidas en conjuntos difusos. Versiones matemáticas de las reglas *Si... entonces...* se forman combinando esos conjuntos difusos.

El primero en presentar el modelado matemático de conceptos difusos fue el profesor Lotfi Zadeh. En 1965, Zadeh describió matemáticamente clases de objetos que no tienen criterios de membresía con definiciones precisas.

Antes de definir matemáticamente un conjunto difuso se presenta la siguiente forma de expresar a los subconjuntos. Lo cual permite extender la noción de subconjuntos a subconjuntos difusos.

Un subconjunto  $A$  del conjunto  $X$  puede ser identificado con una función  $X \rightarrow \{0, 1\}$ , como a continuación se muestra:

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases} \quad (2.13)$$

Esta función es llamada **función característica** del conjunto  $A$ .

**Definición 7** Un subconjunto difuso  $A$  del conjunto  $X$  es la función  $A : X \rightarrow [0, 1]$ .

El valor  $A(x)$  es considerado como el grado de membresía de  $x$  en  $A$ . Esta función es llamada **función de membresía** de  $A$ . En el caso especial en que la función de membresía sólo toma los valores 0 y 1,  $A$  es llamado subconjunto **ordinario** de  $X$  ( o en inglés **crisp subset**) y su función de membresía coincide con la función característica. El conjunto  $X$  es llamado el **universo del discurso**. Un subconjunto difuso con frecuencia es simplemente nombrado **conjunto difuso**.

## 2.4.1 Modelado difuso

Los modelos dinámicos difusos Takagi-Sugeno (T-S) están descritos por reglas *SI - ENTONCES* y son utilizados para representar de manera exacta sistemas no lineales en una región de interés.

Una manera de llevar a cabo el modelado difuso de un sistema no lineal es mediante la metodología dada por Lian et al. (2001a,b), la cual se explica a continuación.

Considere el siguiente sistema no lineal:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t)) + g(\mathbf{x}(t))u(t), \quad (2.14)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}^p$  es el vector de control,  $f$  y  $g$  son funciones no lineales con dimensiones apropiadas. Entonces el modelo difuso está compuesto por las siguientes reglas:

*Regla i:*

SI  $z_1(t)$  es  $F_{1i}$  y ... y  $z_g(t)$  es  $F_{gi}$  ENTONCES

$$\dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x}(t) + B_i u(t) + b_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, r \quad (2.15)$$

donde  $z_1(t) \dots z_p(t)$  son las variables premisa que consistirían en variables de estado;  $F_{j,i}$  ( $j = 1, \dots, g$ ) son conjuntos difusos;  $r$  es el número de reglas difusas;  $A_i$  y  $B_i$  son matrices del sistema con dimensiones apropiadas;  $b_i(t)$  denota el término de sesgo (*bias*), el cual es generado por el procedimiento del modelado difuso exacto.

Un diagrama general de un sistema lógico difuso se presenta en la figura 2.3, tomado de (Boubellouta et al., 2019). La fusificación es la traducción del valor de entrada a valores difusos. El sistema de inferencias difuso realiza el cálculo o la aplicación de las reglas. Mientras que la defusificación realiza la traducción a valores *crisp*. En este caso, utilizando el fusificador *singleton*, la inferencia difusa del producto y el defusificador promedio ponderado, las salidas finales de los sistemas difusos se infieren de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \{A_i \mathbf{x}(t) + B_i u(t) + b_i\} \quad (2.16)$$

donde  $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_g(t)]^T$ , y  $\mu_i(z(t)) = w_i(z(t)) / \sum_{j=1}^r w_j(z(t))$  con  $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^g F_{ji}(z_j(t))$ .

Note que  $\sum_{j=1}^r \mu_j(z(t)) = 1$  para todas las  $t$ , donde  $\mu_i(z(t)) \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) son las ponderaciones normalizadas.

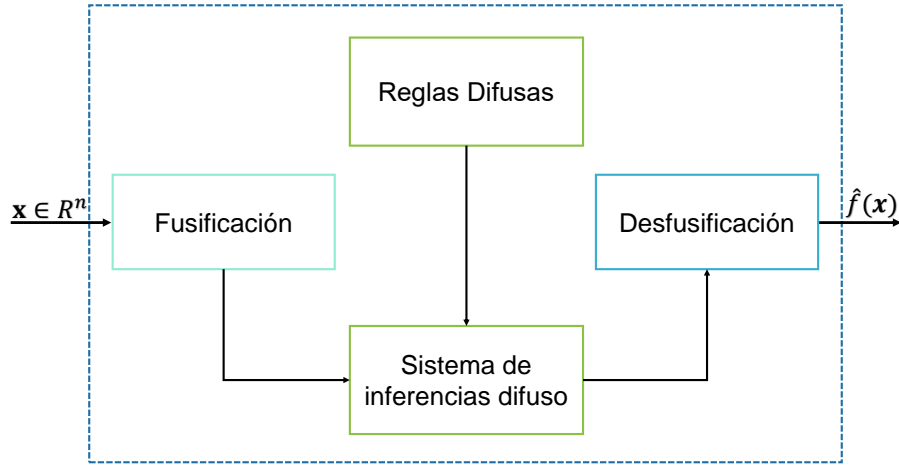


Figura 2.3: Diagrama general de un sistema lógico difuso (Boubellouta et al., 2019).

Ahora, el objetivo es construir un modelo T-S (2.15) que represente exactamente al sistema no lineal (2.14). La función vectorial  $f(\mathbf{x}(t)) + g(\mathbf{x}(t))u(t)$  se expresa como salidas inferidas difusas  $\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))\{A_i\mathbf{x}(t) + B_i u(t) + b_i\}$  en (2.16).

Para construir un modelo T-S difuso es necesario expresar las no linealidades del sistema en salidas inferidas difusas especificando las funciones de membresía en la premisa (parte *SI*) y los coeficientes asociados en la consecuencia (parte *ENTONCES*). Para este fin, en la metodología propuesta por Lian et al. (2001b) se consideran los siguientes casos: 1) términos no lineales que dependen de sola una variable, y 2) términos no lineales dependientes de múltiples variables.

Por simplificación, el modelado difuso se realiza en la región de la solución del sistema definida por  $\Omega = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}(t)\| \leq \delta\}$ , para algún  $\delta > 0$ .

### Caso 1) Términos no lineales que dependen de sola una variable

Sea  $f(x_l)$  una función no lineal que únicamente depende de la variable de estado  $x_l$ . Permitiendo que  $f(x_l)$  adopte la forma  $\phi(x_l)x_\eta$ , donde  $x_\eta$  se define como

$$x_\eta = \begin{cases} x_l & \text{si } \lim_{x_l \rightarrow 0} \frac{f(x_l)}{x_l} \text{ existe} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.17)$$

La función  $\phi(x_l)$  depende de la variable  $x_l$ . Eligiendo a  $x_l$  como la variable premisa, se tiene que la representación difusa  $\hat{f}$  está compuesta por las siguientes reglas.

*Regla i:*

SI  $x_l(t)$  es  $F_i$  ENTONCES

$$\hat{f} = d_i x_\eta, \quad i = 1, 2, 3, \dots, r \quad (2.18)$$

donde  $F_i$  son conjuntos difusos;  $d_i$  son coeficientes constantes por determinar y  $r$  es el número de reglas difusas.

La salida inferida difusa es escrita como

$$\hat{f}(x_l) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x_l) d_i}{\sum_{i=1}^r w_i(x_l)} x_\eta = \left( \sum_{i=1}^r w_i(x_l) d_i \right) x_\eta$$

con  $w_i(x_l) = F_i(x_l) \geq 0$ , que debe ser igual a  $\phi(x_l) x_\eta$ . Suponiendo que  $\sum_{i=1}^r w_i(x_l) = 1$ , se tiene que  $\phi(x_l) = \sum_{i=1}^r w_i(x_l) d_i$ , por lo que  $f(x_l)$  puede ser exactamente representado por un sistema difuso  $\hat{f}(x_l)$  eligiendo adecuadamente  $F_i(x_l)$  y  $d_i$  en la región  $\Omega$ .

A manera de ejemplo se especifican las funciones de membresía cuando  $r = 2$ . Partiendo de que se satisfacen las siguientes ecuaciones  $w_1 + w_2 = 1$  y  $d_1 w_1 + d_2 w_2 = \phi(x_l)$  se tiene que

$$w_1 = \frac{-d_2}{d_1 - d_2} + \frac{1}{d_1 - d_2} \phi(x_l), \quad w_2 = 1 - w_1.$$

Los valores de  $d_1$  y  $d_2$  deben satisfacer que  $w_i(x_l) \in [0, 1]$  para todos los  $x_l \in \Omega$ .

Si se elige a  $d_1 = -d_2 = d$  en donde  $d = \sup_{x \in \Omega} |\phi(x_l)|$ . Entonces

$$F_1(x_l) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{d} \right) \phi(x_l),$$

$$F_2(x_l) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{d} \right) \phi(x_l).$$

Otra opción razonable es elegir a los conjuntos difusos como

$$F_1(x_l) = \frac{1}{d} \phi(x_l),$$

$$F_2(x_l) = 1 - \frac{1}{d} \phi(x_l).$$

con  $d_1 = d$  y  $d_2 = 0$ , si  $\phi(x_l) \geq 0$ .

Es importante resaltar que existen otras representaciones para  $x_\eta$  además de la dada en la ecuación (2.17) (Lian et al., 2001b).

## Caso 2) Términos no lineales dependientes de múltiples variables

Sea  $f(\mathbf{x})$  una función no lineal donde  $\mathbf{x} = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$  está conformada por múltiples variables de estado.

Suponiendo que  $f(\mathbf{x})$  puede separarse como  $f(\mathbf{x}) = \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \dots \phi_n(x_n) x_\eta$ , donde  $x_\eta$  se define como

$$x_\eta = \begin{cases} x_l & \text{si } \lim_{x \in \omega, x_l \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x})}{x_l} \text{ existe, para algún } l = 1, 2, \dots, n. \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.19)$$

Eligiendo a las variables  $x_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) como variables premisas, entonces la  $i$ -ésima regla del sistema difuso está dada por *Regla i*:

SI  $x_1(t)$  es  $F_{1i}$  y  $\dots$  y  $x_n(t)$  es  $F_{ni}$  ENTONCES

$$\hat{f} = d_i x_\eta, \quad i = 1, 2, 3, \dots, r \quad (2.20)$$

donde  $F_{li}$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) son conjuntos difusos;  $\hat{f}$  es la representación difusa de  $f(\mathbf{x})$  y  $d_i$  son coeficientes constantes por determinar.

La salida final del sistema difuso es inferida por

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x}) d_i}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x})} x_\eta$$

donde  $w_i(\mathbf{x}) = \prod_{l=1}^n F_{li}(x_l)$ ,  $F_{li}(x_l)$  es el grado de membresía de  $x_l$  en el conjunto difuso  $F_{li}$ .

Las funciones de membresía de  $x_l$  y los coeficientes  $d_i$  se eligen tal que  $F_{li}(x_l) \in [0, 1]$ ,  $\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x}) = 1$  y  $\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n) = \sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x})d_i$ .

A continuación, se ejemplifica el caso 2), proporcionando las funciones de membresía cuando  $r=4$ .

Sea  $f(x_l, x_k)$  una función no lineal que puede expresarse como  $\phi(x_l)\phi(x_k)x_\eta$ . Los arreglos de los conjuntos difusos de las variables  $x_l$  y  $x_k$  son  $\{F_l^a, F_l^b\}$  y  $\{F_k^a, F_k^b\}$ , respectivamente. Los cuales satisfacen que  $F_l^a(x_l) + F_l^b(x_l) = 1$  y  $F_k^a(x_k) + F_k^b(x_k) = 1$ .

Si las reglas difusas se eligen tal que  $F_{l1} = F_{l3} = F_l^a$  y  $F_{l2} = F_{l4} = F_l^b$ ,  $F_{k1} = F_{k2} = F_k^a$  y  $F_{k3} = F_{k4} = F_k^b$ , y  $d_1 = -d_2 = -d_3 = d_4 = d_l d_k$ , se tiene que

$$\begin{aligned} F_l^a(x_l) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\phi_l(x_l)}{d_l} \right), & F_l^b(x_l) &= 1 - F_l^a(x_l) \\ F_k^a(x_k) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\phi_k(x_k)}{d_k} \right), & F_k^b(x_k) &= 1 - F_k^a(x_k), \end{aligned}$$

donde  $d_l$  y  $d_k$  son cotas superiores de  $|\phi_l|$  y  $|\phi_k|$ , respectivamente. En consecuencia, una representación difusa exacta en la región  $\Omega$  es obtenida.

Similar al caso 1), la representación para  $x_\eta$  no es única (Lian et al., 2001b).

## 2.5 Propiedades de matrices

A continuación, se proporcionan algunas propiedades matriciales importantes para el desarrollo de esta investigación.

Sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica ( $Q = Q^T$ ), y  $\lambda_i$  con  $i = 1, \dots, n$  los valores propios de  $Q$ , entonces (Marquez, 2003)

1.  $Q > 0$ :  $Q$  es **definida positiva** sí y solo si  $x^T Q x > 0, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$ .
2.  $Q < 0$ :  $Q$  es **definida negativa** sí y solo si  $x^T Q x < 0, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i < 0, \forall i = 1, \dots, n$ .



## 2.6 Tipos de sincronización

En esta sección se recopilan diferentes tipos de sincronización encontrados en la literatura revisada, los cuales se clasifican con respecto a la definición del error.

Para este fin, sea  $D\mathbf{x}$  el sistema maestro y  $D(\tilde{\mathbf{x}}+u)$  donde  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  y  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m]$  son vectores de estado y  $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]$  es el control.

**Sincronización completa o idéntica (C)** Si el error del sistema es definido como

$$e_1 = \tilde{x}_1 - x_1$$

entonces  $\tilde{x}_1$  y  $x_1$  están completamente sincronizadas (Pham et al., 2018).

**Sincronización inversa completa (IC)** Si el error del sistema es definido como

$$e_1 = x_1 - \tilde{x}_1$$

entonces  $x_1$  y  $\tilde{x}_1$  están sincronizadas de manera inversa completa (Pham et al., 2018).

**Anti-sincronización (AS)** Si el error se define de la siguiente manera

$$e_2 = x_2 + \tilde{x}_2$$

entonces  $x_2$  y  $\tilde{x}_2$  están anti-sincronizadas (Pham et al., 2018).

**Sincronización anti-fase (AF)** Si el error se define de la siguiente manera

$$e_2 = x_2 - (-\tilde{x}_2)$$

entonces  $x_2$  y  $\tilde{x}_2$  están sincronizadas anti-fase (Ouannas et al., 2018).

**Sincronización generalizada (G)** Si el error se define como

$$e_i = \tilde{x}_i - (\phi_i(\mathbf{x})) \text{ para } i = 1, \dots, n$$

suponiendo que  $n = m$  y  $\phi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables, entonces  $\tilde{x}_i$  y  $x_i$  están sincronizadas de manera generalizada (Ouannas et al., 2017b; Muthukumar et al., 2018).

**Sincronización inversa generalizada (IG)** Si el error se define como

$$e_i = \psi_i(\tilde{\mathbf{x}}) - x_i \text{ para } i = 1, \dots, n$$

suponiendo que  $n = m$  y  $\psi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables, entonces  $\tilde{x}_i$  y  $x_i$  están sincronizadas de manera inversa generalizada (Ouannas et al., 2017b).

**Sincronización generalizada proyectiva (GP)** Si el error se define de la siguiente manera

$$e_i = \tilde{x}_i - \lambda_i x_i$$

donde  $\lambda_i$  es un factor escalar, entonces  $\tilde{x}_i$  y  $x_i$  están sincronizadas de manera generalizada proyectiva (Boubellouta et al., 2019).

**Sincronización  $\delta$  (S- $\delta$ )** Si el error se define

$$e = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$$

y se cumple que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| \geq \delta$  para algún  $\delta > 0$ , entonces se dice que los sistemas están  $\delta$ -sincronizados (Zhou and Zhu, 2017).

**Sincronización proyectiva (P)** Si el error se define de la siguiente manera

$$e_3 = \tilde{x}_3 - \lambda x_3$$

donde  $\lambda$  es un factor escalar, entonces  $\tilde{x}_3$  y  $x_3$  están sincronizadas proyectivamente (Pham et al., 2018).

**Sincronización proyectiva híbrida de estados completos (PHEC)** Si el error se define como

$$e_3 = \tilde{x}_4 - (x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

donde  $n = 3$  y  $m = 4$ , entonces  $\tilde{x}_4$  está sincronizada de manera proyectiva híbrida de estados completos con  $\mathbf{x}$  (Pham et al., 2018).

**Sincronización inversa proyectiva híbrida de estados completos (IPHEC)** Si el error se define como

$$e_3 = x_3 - (2\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 + 4\tilde{x}_3 + 5\tilde{x}_4)$$

donde  $n = 3$  y  $m = 4$ , entonces  $x_3$  está sincronizada de manera inversa proyectiva híbrida de estados completos con  $\tilde{\mathbf{x}}$  (Pham et al., 2018).

**Sincronización combinada (CMB)** Para esta sincronización se consideran los siguientes sistemas:  $D\mathbf{x}$  como el primer sistema maestro,  $D\mathbf{y}$  como el segundo sistema maestro,  $D(\mathbf{z} + u)$  como el sistema esclavo, donde  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ ,  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  y  $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]$  son vectores de estado y  $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]$  es el control. Si existen tres matrices constantes  $Q$ ,  $W$ ,  $E \in \mathbb{R}^n$  y  $E \neq 0$  que cumplen que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Q\mathbf{x} + W\mathbf{y} - E\mathbf{z}\| = 0,$$

entonces se tiene la sincronización combinada entre  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$  (Wang et al., 2019b).

## 2.7 Teoría de estabilidad

Se dice que un sistema dinámico es estable (en el sentido de Lyapunov) si para cada pequeño  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que cada solución  $f(t)$  con condiciones iniciales en una distancia menor a  $\delta$ ,  $\|f(t_0) - f_e(t_0)\| < \delta$  permanece dentro de la distancia  $\epsilon$ ,  $\|f(t) - f_e(t)\| < \epsilon$  para cualquier  $t \geq t_0$ . Notese que esta definición depende de función de distancia usada. La teoría de estabilidad se ocupa del estudio de la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales y trayectorias de sistemas dinámicos bajo perturbaciones de las condiciones iniciales. En consecuencia, la teoría de estabilidad permite ver la convergencia del error, lo que se traduce en realizar satisfactoriamente la sincronización. La estabilidad puede estudiarse bajo diferentes aproximaciones. A continuación, revisamos brevemente la teoría de estabilidad lineal y la teoría de estabilidad de Lyapunov que son las relevantes para este trabajo. Otras aproximaciones, que no discutimos aquí por ejemplo incluyen teoría de estabilidad no-lineal autónoma o los métodos de Routh-Hurwitz entre otros (Shinners, 1978).

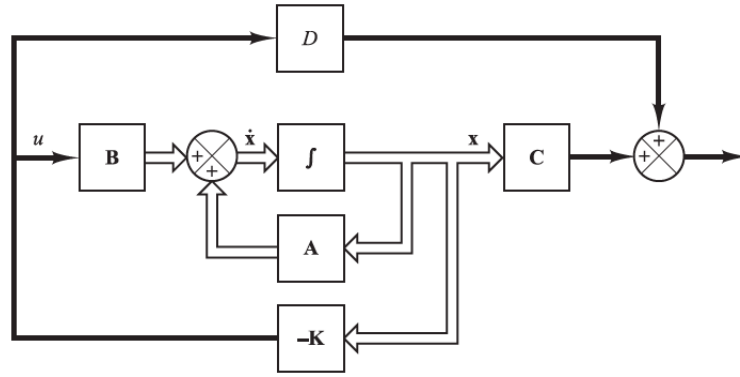


Figura 2.4: Diagrama de bloques del sistema de control en lazo cerrado con  $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$  (Ogata, 2010).

### 2.7.1 Teoría de estabilidad lineal

Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du\end{aligned}\quad (2.21)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de estado (vector de dimensión  $n$ );  $y$  es la señal de salida (escalar);  $u$  es la señal de control (escalar);  $\mathbf{A}$  es una matriz de coeficientes constantes  $n \times n$ ;  $\mathbf{B}$  es una matriz de coeficientes constantes  $n \times 1$ ;  $\mathbf{C}$  es una matriz de coeficientes constantes  $1 \times n$ ;  $D$  es una constante (escalar).

La señal de control es seleccionada como

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}. \quad (2.22)$$

La matriz  $\mathbf{K}$  de dimensión  $1 \times n$  es conocida como matriz de ganancia de realimentación de estado. En este escenario, se supone que todas las variables de estado están disponibles para su realimentación.

En la figura 2.4 se muestra un diagrama de bloques del sistema. Este sistema está en lazo cerrado y no tiene entradas. El objetivo del sistema es mantener la salida a cero debido a que pueden existir perturbaciones que desviarán la salida.

Al sustituir la ecuación del control (2.22) en el sistema (2.21) se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t). \quad (2.23)$$

Luego, de la teoría de ecuaciones diferenciales se sabe que la solución de esta ecuación está dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)}\mathbf{x}(0) \quad (2.24)$$

donde  $\mathbf{x}(0)$  es el estado inicial.

De acuerdo con Ogata (2010), la estabilidad y las características de respuesta transitoria se determinan mediante los valores característicos de la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ . Al elegir la matriz  $\mathbf{K}$  adecuadamente, la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  se convierte en una matriz asintóticamente estable y para todos los  $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$  es posible hacer que  $\mathbf{x}(t)$  tienda a  $\mathbf{0}$  conforme  $t$  tiende a infinito. Si los valores propios de la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  tienen parte real negativa, entonces  $\mathbf{x}(t)$  tiende a  $\mathbf{0}$  cuando  $t$  tiende a infinito.

## 2.7.2 Teoría de estabilidad de Lyapunov

Para comprender la teoría de estabilidad de Lyapunov es necesario entender el *Segundo método de Lyapunov*. El cual es una generalización de dos principios físicos: (i) una posición en reposo es estable si su energía potencial es un mínimo local, de lo contrario es inestable y (ii) la energía total es constante durante cualquier movimiento (Boyce and DiPrima, 2001).

De forma general, se considera el siguiente sistema

$$dx/dt = F(x, y) \quad dy/dt = G(x, y) \quad (2.25)$$

y se supone que el punto  $x = 0, y = 0$  es un punto crítico asintóticamente estable. Entonces, existe algún dominio  $D$  que contiene al punto  $(0, 0)$  tal que cada trayectoria que empieza en  $D$  debe acercarse al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Supongamos que existe una función de *energía*  $V$ , tal que  $V \geq 0$  para  $(x, y) \in D$  con  $V = 0$  sólo en el origen. La función  $V$  es llamada **función de Lyapunov**. Dado que cada trayectoria en  $D$  se aproxima al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces siguiendo cualquier trayectoria,  $V$  disminuye a cero cuando  $t$  se aproxima a infinito. El resultado importante es el siguiente: Si en cada trayectoria  $V$  disminuye a cero a medida que  $t$  aumenta, entonces las trayectorias se acercan al origen cuando  $t$  tiende a infinito, y por lo tanto el origen es asintóticamente estable.

Los siguientes conceptos son útiles al emplear la teoría de estabilidad de Lyapunov.

**Definición 8** Sea  $V$  una función definida en algún dominio  $D$  que contenga al origen. Entonces se dice que  $V$  es **definida positiva** en  $D$  si  $V(0, 0) = 0$  y  $V(x, y) > 0$  para los otros puntos de  $D$ .

**Definición 9** De manera análoga a la definición 8, se dice que  $V$  es **definida negativa** en  $D$  si  $V(0, 0) = 0$  y  $V(x, y) < 0$  para los otros puntos en  $D$ .

Si las desigualdades  $>$  y  $<$  son reemplazadas por  $\geq$  y  $\leq$ , entonces  $V$  se dice semidefinida positiva y semidefinida negativa, respectivamente.

Considere también la función

$$\dot{V} = V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y) \quad (2.26)$$

donde  $F$  y  $G$  son las mismas funciones de las ecuaciones (2.25).  $\dot{V}(x, y)$  puede describir la tasa de cambio a lo largo de la trayectoria del sistema (2.25) que pasa por el punto  $(x, y)$ . Esto es, si  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  son una solución del sistema (2.25), entonces

$$\frac{dV[\phi(t), \psi(t)]}{dt} = V_x[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\phi(t)}{dt} + V_y[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\psi(t)}{dt} \quad (2.27)$$

$$= (V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y)) \quad (2.28)$$

$$= \dot{V}. \quad (2.29)$$

La función  $\dot{V}$  es algunas veces llamada como la derivada de  $V$  con respecto al sistema (2.25).

A continuación se enuncian dos teoremas de Lyapunov, el primero tiene que ver con la estabilidad y el segundo con la inestabilidad.

**Teorema 1** (Boyce and DiPrima, 2001) Considere que el sistema autónomo (2.25) tiene un punto crítico aislado en el origen. Si existe una función  $V$  continua con las primeras derivadas parciales continuas y definida positiva. Para el cual la función  $\dot{V}$  dada por la ecuación (2.26) es definida negativa en algún dominio  $D$  del plano  $x - y$  que incluye el punto  $(0, 0)$ . Entonces, el origen es un

punto crítico asintóticamente estable. Si  $\dot{V}$  es semidefinida negativa, entonces el origen es un punto crítico estable.

**Teorema 2** (Boyce and DiPrima, 2001) Sea el origen un punto crítico aislado del sistema autónomo (2.25). Sea  $V$  una función continua con las primeras derivadas parciales continuas. Suponga que  $V(0, 0) = 0$  y que en cualquier vecindad del origen existe al menos un punto en el cual  $V$  es positiva (negativa). Si existe un dominio  $D$  que contiene al origen tal que la función  $\dot{V}$  dada por la ecuación (2.26) es definida positiva (definida negativa) en  $D$ , entonces el origen es un punto crítico inestable.

Las pruebas a los teoremas 1 y 2 se pueden encontrar en (Vidyasagar, 1993).

Utilizar los teoremas 1 y 2 es difícil porque no indican cómo construir la función de Lyapunov, suponiendo que exista. Si el sistema autónomo (2.25) representa un problema físico, es natural considerar primero la función de energía total real del sistema como una posible función de Lyapunov. Sin embargo, los teoremas 1 y 2 son aplicables en casos en los que el concepto de energía física no es pertinente. En tales casos, puede ser necesario un enfoque de prueba y error.

Un resultado algebraico que algunas veces es útil en la construcción funciones definidas positivas o negativas está dado por el siguiente teorema.

**Teorema 3** (Boyce and DiPrima, 2001) La función

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad (2.30)$$

es definida positiva, si y sólo si

$$a > 0 \quad y \quad 4ac - b^2 > 0 \quad (2.31)$$

y es definida negativa, si y sólo si

$$a < 0 \quad y \quad 4ac - b^2 > 0. \quad (2.32)$$

A continuación se describe mediante un ejemplo el uso del teorema 3.

El punto  $(0, 0)$  del sistema autónomo

$$dx/dt = -x - xy^2, \quad dy/dt = -y - x^2y \quad (2.33)$$

es asintóticamente estable.

Al construir la función de Lyapunov de la forma (2.30), se tiene que  $V_x(x, y) = 2ax + by$  y  $V_y(x, y) = bx + 2cy$ , por lo que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= (2ax + by)(-x - xy^2) + (bx + 2cy)(-y - x^2y) \\ &= -[2a(x^2 + x^2y^2) + b(2xy + xy^3 + x^3y) + 2c(y^2 + x^2y^2)]. \end{aligned}$$

Si se eligen  $b = 0$ , y  $a$  y  $c$  como números positivos, entonces  $\dot{V}$  es definida negativa y  $V$  es definida positiva por el teorema 3. Entonces, por el teorema 1, es un punto crítico asintóticamente estable.

## Capítulo 3

# Estado del arte

En esta sección se presenta una revisión de la literatura que cubre los principales aspectos de esta investigación. Para empezar, hacemos un análisis de las técnicas de sincronización aplicadas a sistemas caóticos fraccionarios. Posteriormente, el análisis se vuelve más específico, puesto que revisamos trabajos relacionados con sincronización de sistemas fraccionarios con atractores ocultos.

### 3.1 Técnicas de sincronización

Diversas técnicas de control se han utilizado para llevar a cabo la sincronización entre dos sistemas fraccionarios caóticos. A continuación, se presentan algunas técnicas recientemente utilizadas de acuerdo al tipo de control, método o leyes empleadas y se proporciona una breve descripción de cada una. En la figura 3.1 presentamos una taxonomía de las técnicas de sincronización revisadas.

Las funciones de Lyapunov han sido utilizadas para el diseño del control. Éstas deben satisfacer la condición de Lyapunov (Nguyen, 2018) para lograr la sincronización. El principal reto en este tipo de enfoque es encontrar las funciones de Lyapunov que satisfagan la condición exigida. Este control se ha empleado para sincronizar de forma completa, inversa completa, anti-sincronización, inversa proyectiva híbrida completa y anti-fase (Ouannas et al., 2018; Pham et al., 2018; Ouannas et al., 2019; Zhang et al., 2019; Kumar et al., 2019).

Otro enfoque ampliamente utilizado está basado en la teoría de estabilidad lineal de sistemas fraccionarios. Esta teoría es una extensión de la teoría clásica de estabilidad lineal (Matignon, 1996). Este control ha sido utilizado en sincronización completa, proyectiva híbrida completa, inversa proyectiva híbrida completa, generalizada y  $S-\delta$  (Wu et al., 2012; Borah et al., 2017; Borah and Roy, 2017; Ouannas et al., 2017a; Zhou and Zhu, 2017; Pham et al., 2018; Ouannas et al., 2019).

Recientemente, han sido publicados trabajos que apuestan por el control en modo deslizante (Muthukumar et al., 2018; Kumar et al., 2019), éste es un método de control no lineal. Esencialmente consiste en llevar los estados del sistema sobre una superficie particular en espacio de estados y forzarlos a evolucionar sobre ésta. Tal superficie se denomina superficie deslizante. El comportamiento dinámico del sistema en estas condiciones queda determinado por las ecuaciones que definen dicha superficie en el espacio de estados (Kumar et al., 2019). Sin embargo, elegir la superficie deslizante para siste-

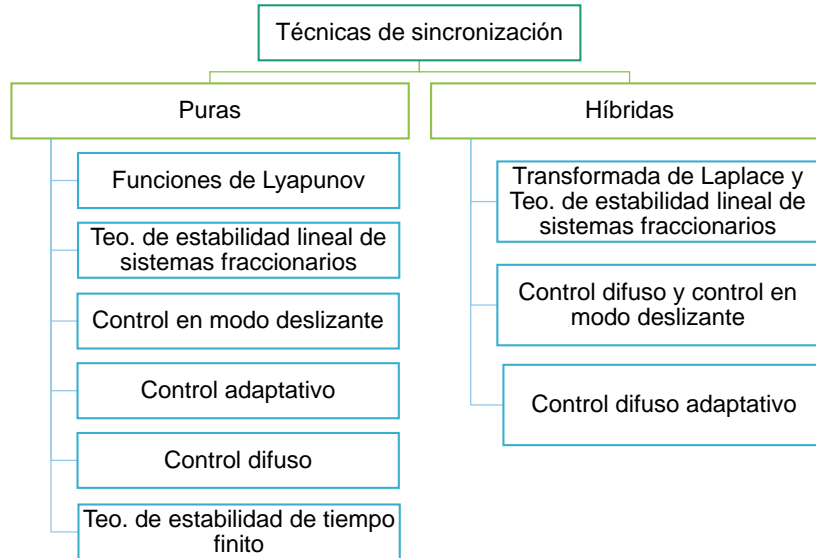


Figura 3.1: Taxonomía de las técnicas de sincronización. En este trabajo, la palabra *puras* se refiere a la utilización de una única técnica, mientras que *híbridas* se refiere a la combinación de técnicas puras.

mas de orden fraccional es una tarea complicada (Boubellouta et al., 2019). Este tipo control ha sido utilizado en sincronización completa y robusta generalizada (Muthukumar et al., 2018; Kumar et al., 2019).

El control adaptativo también ha tomado un lugar (Li and Wu, 2019). Éste tiene la capacidad de ajustarse para manejar las incertidumbres del modelo. En Li and Wu (2019) trabajaron con el supuesto de tener perturbaciones externas desconocidas y únicamente realizaron sincronización completa (Li and Wu, 2019).

Otra propuesta opta por el control difuso, que ha demostrado ser una estrategia de control efectiva, robusta y puede trabajar con parámetros inciertos (Wang et al., 2015, 2016; Aguiar et al., 2016; Muthukumar et al., 2016). Basados en la generalización del modelo difuso de Takagi-Sugeno, Wang et al. (2015) proporcionan una condición de estabilidad para sincronizar sistemas fraccionarios caóticos. Este control se ha utilizado para sincronización completa, anti-sincronización, generalizada y proyectiva generalizada (Wang et al., 2015, 2016; Aguiar et al., 2016; Muthukumar et al., 2016).

La teoría de estabilidad de tiempo finito para sistemas de orden fraccionario fue propuesta por (Zhao Ling-Dong Hu Jian-Bing, 2011), los estudios que optan por este enfoque utilizan un teorema de estabilidad de tiempo finito para estabilizar el error de la sincronización completa y combinada en un tiempo finito (Wang et al., 2019b; Fang et al., 2019; Yan et al., 2019b; Zheng et al., 2019).

También, se encontraron trabajos que combinan algunos de los controles anteriormente mencionados. En este trabajo les llamaremos controles híbridos.

Uno de estos controles híbridos combina la transformada de Laplace con la teoría de estabilidad lineal de sistemas fraccionarios. Esta propuesta consiste en aplicar la transformada de Laplace al sis-

tema esclavo, realizar algunas operaciones y después aplicar la transformada inversa de Laplace. Al final de estas transformaciones derivan el control a través de la teoría de estabilidad lineal de sistemas fraccionarios. Este control ha sido utilizado para realizar sincronización completa, generalizada e inversa generalizada (Ouannas et al., 2017b; Deng and Li, 2005).

Otros estudios optan por la combinación de las funciones de Lyapunov y la teoría de estabilidad lineal de sistemas fraccionarios (Pham et al., 2018; Ouannas et al., 2019). Con este control híbrido han logrado sincronización completa, inversa completa, anti-sincronización, proyectiva híbrida de estados completos e inversa proyectiva híbrida de estados completos (Pham et al., 2018; Ouannas et al., 2019).

Otro estudio propone un control híbrido cuya novedad consiste en combinar un control difuso con un control en modo deslizante adaptativo. Su objetivo es eliminar las dificultades que se presentan al utilizar únicamente el control por modo deslizante. Además, trabajan con sistemas que tienen perturbaciones externas. Sincronizaron de forma completa, proyectiva generalizada y proyectiva anti-fase (Boubellouta et al., 2019).

Una propuesta más es utilizar la teoría de estabilidad lineal fraccionaria junto con un control difuso adaptativo (Zhou et al., 2019b). Este estudio proporciona un sistema generalizado difuso T-S que puede aproximar uniformemente cualquier función continua en un conjunto compacto con precisión aleatoria utilizando el teorema de Stone-Weierstrass. Este control híbrido fue aplicado con éxito a sistemas fraccionarios caóticos con perturbaciones externas y entradas saturadas sincronizando de manera generalizada proyectiva (Zhou et al., 2019b).



Estudio	Funciones de Lyapunov	Teo. de est. lineal de sist. fraccionarios	Control en modo deslizante	Control adaptativo	Control difuso	Transf. de Laplace	Teo. de est. de tiempo finito
Técnicas puras							
2012	Wu et al.	✓					
2015	Wang et al.				✓		
2016	Aguiar et al.				✓		
2016	Muthukumar et al.				✓		
2017	Borah et al.	✓					
2017	Borah and Roy	✓					
2017a	Ouannas et al.	✓					
2017a	Pham et al.						
2017	Zhou and Zhu	✓					
2018	Muthukumar et al.		✓				
2018	Ouannas et al.	✓					
2019	Fang et al.						✓
2019	Kumar et al.		✓				
2019	Li and Wu			✓			
2019b	Wang et al.						✓
2019b	Yan et al.						✓
2019	Zhang et al.	✓					
2019	Zheng et al.						✓
Técnicas híbridas							
2017b	Ouannas et al.	✓					✓
2018	Pham et al.	✓					
2019	Boubellouta et al.		✓	✓	✓		
2019	Ouannas et al.	✓					
2019b	Zhou et al.			✓	✓		

Tabla 3.1: Técnicas de control

En la tabla 3.1 resumimos los tipos de control y los estudios revisados. Mientras que en la tabla 3.2 recopilamos los tipos de sincronización utilizada en cada estudio. Finalmente, en la tabla 3.3 proporcionamos las características de los sistemas sincronizados por cada trabajo de investigación.

En los estudios revisados, el tipo de sincronización más utilizado es la completa (ver tabla 3.2), y los sistemas mayormente utilizados fueron los idénticos conmensurados (ver tabla 3.3).

Por otro lado, los tiempos empleados para la sincronización en cada uno de los estudios revisados se reportan en la tabla 3.4. En las primeras dos columnas se reportan el año y autor(es) de los trabajos; en la tercera y cuarta columnas se reportan los sistemas caóticos que fueron empleados como maestro y esclavo, respectivamente; en la quinta columna el tiempo utilizado para llevar a cabo las sincronizaciones, el tiempo está dado en unidades de tiempo (ut): segundos (s) cuando lo indican explícitamente. En la sexta columna el número de iteraciones utilizadas para llevar a cabo la sincronización; en la séptima columna la técnica de control y finalmente en la octava columna el tipo de sincronización.

De acuerdo con los tiempos reportados en la tabla 3.4, encontramos que no existe uniformidad en las unidades de tiempo reportadas (algunos no indican las unidades de tiempo utilizadas de forma explícita: segundos, minutos, horas, etc), por esa razón se decidió incluir el número de iteraciones pero no todos los trabajos las incluían.

Al centrarnos en los trabajos que utilizaron segundos para medir el tiempo de sincronización, el rango de tiempo se encuentra entre 1s y 10s. Las técnicas de sincronización que reportan los tiempos más cortos (1s) son: control difuso, teoría de estabilidad de tiempo finito, y control difuso adaptativo.

	<b>Estudio</b>	<b>C</b>	<b>IC</b>	<b>AS</b>	<b>AF</b>	<b>G</b>	<b>IG</b>	<b>GP</b>	<b>S-<math>\delta</math></b>	<b>P</b>	<b>PHEC</b>	<b>IPHEC</b>	<b>CMB</b>
<b>Puros</b>													
2012	Wu et al.							✓					
2015	Wang et al.									✓			
2016	Aguiar et al.	✓											
2016	Muthukumar et al.	✓											
2017	Borah et al.	✓											
2017	Borah and Roy	✓											
2017a	Ouannas et al.										✓	✓	
2017a	Pham et al.	✓											
2017	Zhou and Zhu								✓				
2018	Muthukumar et al.					✓							
2018	Ouannas et al.	✓			✓							✓	
2019	Fang et al.	✓											
2019	Kumar et al.	✓											
2019	Li and Wu	✓											
2019b	Wang et al.												✓
2019b	Yan et al.	✓											
2019	Zhang et al.	✓											
2019	Zheng et al.	✓											
<b>Híbridos</b>													
2017b	Ouannas et al.					✓	✓						
2018	Pham et al.	✓	✓	✓						✓	✓	✓	
2019	Boubellouta et al.	✓						✓					
2019	Ouannas et al.	✓											
2019b	Zhou et al.							✓					

Tabla 3.2: Relación de los estudios de acuerdo al tipos de sincronización utilizada, definidas en la sección 2.6.

	<b>Estudio</b>	<b>Idénticos</b>	<b>Diferentes</b>	<b>Commens.</b>	<b>No commens.</b>	<b>Atractor oculto</b>
<b>Puros</b>						
2012	Wu et al.	✓		✓		
2015	Wang et al.		✓	✓		
2016	Aguiar et al.		✓	✓		
2016	Muthukumar et al.	✓	✓	✓		
2017	Borah et al.	✓		✓		✓
2017	Borah and Roy	✓		✓		✓
2017a	Ouannas et al.		✓		✓	
2017a	Pham et al.	✓		✓		✓
2017	Zhou and Zhu	✓		✓		
2018	Muthukumar et al.		✓	✓		
2018	Ouannas et al.		✓	✓	✓	
2019	Fang et al.	✓		✓		✓
2019	Kumar et al.	✓		✓		
2019	Li and Wu		✓		✓	
2019b	Wang et al.	✓		✓		✓
2019b	Yan et al.	✓		✓		✓
2019	Zhang et al.	✓		✓		
2019	Zheng et al.	✓		✓		✓
<b>Híbridos</b>						
2017b	Ouannas et al.		✓		✓	
2018	Pham et al.		✓	✓		✓
2019	Boubellouta et al.	✓	✓	✓	✓	
2019	Ouannas et al.	✓		✓	✓	
2019b	Zhou et al.		✓		✓	

Tabla 3.3: Características de los sistemas sincronizados

Tabla 3.4: Tiempos de las sincronizaciones de los trabajos revisados. En la tercera y cuarta columnas se reportan los sistemas caóticos que fueron empleados como maestro y esclavo, respectivamente; en la quinta columna el tiempo utilizado para llevar a cabo las sincronizaciones, el cual está dado en unidades de tiempo (ut): segundos (s) cuando lo indican explícitamente. En la sexta columna el número de iteraciones utilizadas para llevar a cabo la sincronización; en la séptima la técnica de control; en la octava el tipo de sincronización.

<b>Estudio</b>	<b>Sistema maestro</b>	<b>Sistema esclavo</b>	<b>Tiem- po</b>	<b>Itera- ciones</b>	<b>Técnica control</b>	<b>Tipo sincronización</b>
Puros						
2012	Wu et al.	Wu hipercaótico fracc.	10ut		Func. Lyap	GP
2015	Wang et al.	Chen entero	7.5s		Difuso	P
		Lorenz hipercaótico fracc.	2s			P
2016	Aguiar et al.	Chen entero	2s			P
		Rosler fracc.	1s		Difuso	C
		Lu fracc. con incertidumbre	10s			C
2016	Muthukumar et al.	En forma de mariposa inversa fracc.	3ut		Predictivo difuso	C
		En forma de mariposa inversa fracc.	5ut			C
2017	Borah et al.	Borah fracc.	4s		Teo. de est. lineal de sist. fracc.	C
	Borah y Roy	Borah y Roy fracc.	2s		Teo. de est. lineal de sist. fracc.	C

(sigue en la página siguiente)

Tabla 3.4: Continuación de la tabla

Estudio	Sistema maestro	Sistema esclavo	Tiempo	Iteraciones	Técnica control	Tipo sincronización
2017a	Ouannas et al.	Sistema fracc. de Wang y Wang	5s		Teo. de est. lineal de sist. fracc.	C
2017a	Pham et al.	Pham fracc.	100ut		Func. Lyap.	C, AS, P y PHEC coexisten
2017	Zhou and Zhu	Lorenz fracc.	580ut		Teo. de est. lineal de sist. fracc.	S- $\delta$ , $e < 7.8 \times 10^{-2}$
2018	Muthukumar et al.	Chua fracc. Lorenz hipercaótico fracc.	350ut 2.6s		Teo. de est. lineal de sist. fracc. Control deslizante	S- $\delta$ , $e < 3.2 \times 10^{-3}$ G
2018	Ouannas et al.	Rosler fracc.	3s			C, AF e IPHEC coexisten
2019	Fang et al.	Lu fracc. Fang hipercaótico fracc.	5s 4s	4000	Func. Lyap. Teo. de est. tiempo finito	C, AF e IPHEC coexisten
2019	Kumar et al.	Rabinovich-Fabrikant fracc.	5ut		Control deslizante	C
2019	Li and Wu	Lu fracc. con perturbaciones ext.	2s	200	Adaptativo	C
2019b	Wang et al.	Wang fracc.	12		Teo. de est. tiempo finito	CMB

(sigue en la página siguiente)

Tabla 3.4: Continuación de la tabla

Estudio	Sistema maestro	Sistema esclavo	Tiempo	Iteraciones	Técnica control	Tipo sincronización
2019b	Yan et al. Sprott C fracc. con perturbaciones	Sprott C fracc. con perturbaciones	4s	4000	Teo. de est. tiempo finito	C
2019	Zhang et al. Tipo Lorenz fracc. complejo	Tipo Lorenz fracc. complejo	50ut		Func. Lyap.	C
2019	Zheng et al. Zheng fracc. con perturbaciones	Zheng fracc. con perturbaciones	1s		Teo. de est. tiempo finito	C
Híbridos						
2017b	Ouannas et al. Dinamo modificado incommensurado fracc.	Lorenz hipercaótico fracc.	4s	800	Teo. est. lineal de sist. fracc. y transf. Laplace	G e IG coexisten
2018	Pham et al. Li hipercaótico fracc.	Pham hipercaótico fracc.	5s		Func. Lyap y teo. est. lineal sist. fracc.	C, AS, P y PHEC
2019	Boubellouta et al. Dinamo fracc. Chua fracc.	Dinamo fracc. con perturbaciones ext. Financiero fracc. con perturbaciones ext.	1s 3s		Difuso adaptativo deslizando	C GP
2019	Ouannas et al. Rabinovich hipercaótico commensurado fracc. Rabinovich hipercaótico incommensurado fracc.	Rabinovich hipercaótico commensurado fracc. Rabinovich hipercaótico incommensurado fracc.	5ut 10ut		Func. Lyap. y teo. de est. lineal sist. fracc.	C C

(sigue en la página siguiente)

Tabla 3.4: Continuación de la tabla

<b>Estudio</b>	<b>Sistema maestro</b>	<b>Sistema esclavo</b>	<b>Tiem- po</b>	<b>Itera- ciones</b>	<b>Técnica control</b>	<b>Tipo sincronización</b>
2019b Zhou et al.	Incommensu- rado fracc. con perturbaciones ext. y entradas saturadas	No lineal incommensurado fracc. con perturbaciones ext. y entradas saturadas	1 s		Difuso adaptativo	GPF

(Fin de la tabla)



Estudio		Características de los sistemas	
Año	Autor	Con puntos de equilibrio	Sin puntos de equilibrio
2017	Borah et al.	✓	
2017	Borah and Roy		✓
2017a	Pham et al.		✓
2018	Pham et al.		✓
2019	Fang et al.		✓
2019b	Wang et al.	✓	✓
2019b	Yan et al.	✓	
2019	Zheng et al.		✓

Tabla 3.5: Estudios de sincronización de sistemas con atractores ocultos.

### 3.1.1 Sistemas fraccionarios con atractores ocultos

En esta sección nos enfocamos en los trabajos que realizan la sincronización de sistemas caóticos fraccionarios con atractores ocultos. Antes de ahondar en los trabajos que sincronizan sistemas fraccionarios con atractores ocultos, es importante señalar que la existencia de oscilaciones ocultas y una elección inadecuada del control puede conducir a no lograr la sincronización (Kuznetsov et al., 2016). En la literatura, encontramos los siguientes trabajos que seleccionaron adecuadamente el control para lograr sincronizaciones exitosas de sistemas fraccionarios con atractores ocultos.

El primer estudio que encontramos realiza la sincronización completa de dos sistemas idénticos con atractores ocultos. El control utilizado está basado en la teoría de estabilidad fraccionaria. Los sistemas sincronizados tienen puntos de equilibrio, lo que favorece la localización de los atractores ocultos (Borah et al., 2017).

Otros trabajos de investigación también realizan la sincronización completa de sistemas idénticos con atractores ocultos pero sin puntos de equilibrio. El control que utilizan está basado en la teoría de estabilidad fraccionaria (Borah and Roy, 2017; Pham et al., 2017a).

El siguiente estudio combina la teoría de estabilidad fraccionaria y las funciones de Lyapunov para sincronizar dos sistemas distintos. Estos sistemas tienen atractores ocultos sin puntos de equilibrio. Los tipos de sincronización realizada son: completa, inversa completa, anti-sincronización, proyectiva híbrida completa e inversa proyectiva híbrida completa (Pham et al., 2018).

Los trabajos más recientes utilizan la teoría de estabilidad de tiempo finito para sistemas fraccionarios. La mayoría realiza sincronización completa (Fang et al., 2019; Yan et al., 2019b; Zheng et al., 2019) mientras que solo uno sincroniza de forma combinada (Wang et al., 2019b). Con respecto a los puntos de equilibrio, un estudio utiliza sistemas fraccionarios con puntos de equilibrio (Yan et al., 2019b), otros dos estudios trabajan con sistemas sin puntos de equilibrio (Fang et al., 2019; Zheng et al., 2019) y otro más con un sistema que presenta ambos casos (Wang et al., 2019b).

Dado que estos trabajos fueron mencionados en la sección anterior. A continuación mostramos una tabla 3.5 que resalta las características de los sistemas sincronizados que tienen que ver con los atractores ocultos.

De la revisión de la literatura, se concluye que utilizar el control difuso puede ser una elección apropiada para sincronizar sistemas caóticos fraccionarios con atractores ocultos. Puesto que no se ha realizado la sincronización de sistemas fraccionarios con atractores ocultos mediante control difuso se tiene una oportunidad de investigación. Asimismo, en cuanto a la forma de sincronizar es necesario investigar otras opciones como la generalizada o la generalizada proyectiva, las cuales no se han utilizado con este tipo de sistemas fraccionarios.

### **3.2 Evolución del control difuso en la sincronización de sistemas caóticos**

En esta sección nos enfocamos en estudios que realizan sincronización de sistemas fraccionarios mediante control difuso con algunas variantes.

En la literatura revisada encontramos las siguientes variantes del control difuso:

1. Control difuso adaptativo
2. Control difuso compensativo
3. Control difuso con desigualdades matriciales lineales
4. Control difuso predictivo
5. Control difuso de aprendizaje compuesto

La primera propuesta y la más utilizada es el control difuso adaptativo. Fue aplicado a sistemas fraccionarios de orden incierto con retrasos en el tiempo, perturbaciones externas desconocidas e incluso con modelos desconocidos. Los tipos de sincronización conseguidos con este control son: completa, generalizada proyectiva y proyectiva (Lin and Lee, 2011; Boukroune et al., 2016; Liu et al., 2017; Boubellouta et al., 2019; Zhou et al., 2019a). El control difuso adaptativo fue utilizado para estimar en línea los modelos de los sistemas caóticos cuando son desconocidos (Boukroune et al., 2016; Liu et al., 2017) o para aproximar funciones de las perturbaciones externas (Boubellouta et al., 2019). Estos estudios realizaron análisis de estabilidad mediante el método fraccional de Lyapunov (Lin and Lee, 2011; Liu et al., 2017; Zhou et al., 2019a; Boubellouta et al., 2019) o a través de algunas propiedades de la derivada de Caputo (Boukroune et al., 2016)

Otra propuesta es el control difuso compensativo, el cual combina un control difuso y un control compensativo basados en la teoría de estabilidad fraccional. Este estudio trabaja con sistemas de orden entero y fraccionario con parámetros estocásticos y realizan sincronización completa y anti-sincronización (Chen et al., 2013).

El control difuso mediante desigualdades matriciales lineales es otra propuesta. Basados en el modelo difuso de Takagi-Sugeno generalizado, proporcionan una condición de estabilidad eficiente para la sincronización completa y anti-sincronización (Wang et al., 2015).

Estudio		Control
Año	Autor	Variante
2011	Lin and Lee	Control difuso adaptativo en modo deslizante
2013	Chen et al.	Control difuso compensativo
2015	Wang et al.	Control difuso con desigualdades matriciales lineales
2016	Boukroune et al.	Control difuso adaptativo
2016	Muthukumar et al.	Control difuso predictivo
2017	Liu et al.	Control difuso adaptativo
2019	Boubellouta et al.	Control difuso adaptativo en modo deslizante
2019b	Zhou et al.	Control difuso adaptativo
2019a	Zhou et al.	Control difuso de aprendizaje compuesto

Tabla 3.6: Evolución temporal de los controles difusos en sistemas fraccionarios caóticos

El control difuso predictivo fue propuesto para solucionar el problema de la estabilización del modelo difuso de orden fraccionario en diferentes puntos de equilibrio, encontrando las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la estabilidad del sistema de control predictivo difuso T-S de orden fraccionario. Con este control sincronizan de manera completa (Muthukumar et al., 2016).

Por su parte, el control difuso de aprendizaje compuesto fue propuesto para estimar los parámetros de sistemas fraccionarios con parámetros inciertos. Además, trabajaron con sistemas no conmensurados y sincronización proyectiva (Zhou et al., 2019b).

De acuerdo con la revisión de la literatura realizada, el control difuso adaptativo es la variante de control difuso más utilizado (ver tabla 3.6). Además, las variantes de control difuso se han empleado principalmente para sincronizar sistemas fraccionarios de orden incierto, con modelos desconocidos y con perturbaciones desconocidas.

Las variantes del control difuso han trabajado con cuatro tipos de sincronización: completa, anti-sincronización, generalizada proyectiva y proyectiva. Sin embargo, la sincronización completa es la más empleada (ver la gráfica de barras de la figura 3.2).

Y como mencionamos anteriormente, ningún estudio de control difuso ha sincronizado sistemas fraccionarios con atractores ocultos (ver tabla 3.7).

### 3.3 Sumario

A pesar de que la sincronización completa no es la más adecuada para aplicaciones de comunicación segura, la mayoría de los estudios revisados la emplean. Es importante trabajar otros tipos de sincronización como la proyectiva, generalizada proyectiva o la combinada. Investigar las ventajas y desventajas que éstas presentan con respecto a la sincronización completa.

En cuanto al control difuso, es razonable aplicarlo para sincronizar sistemas fraccionarios con atractores ocultos sin puntos de equilibrio puesto que ha mostrado ser una herramienta eficaz al sincronizar sistemas fraccionarios caóticos sin atractores ocultos.

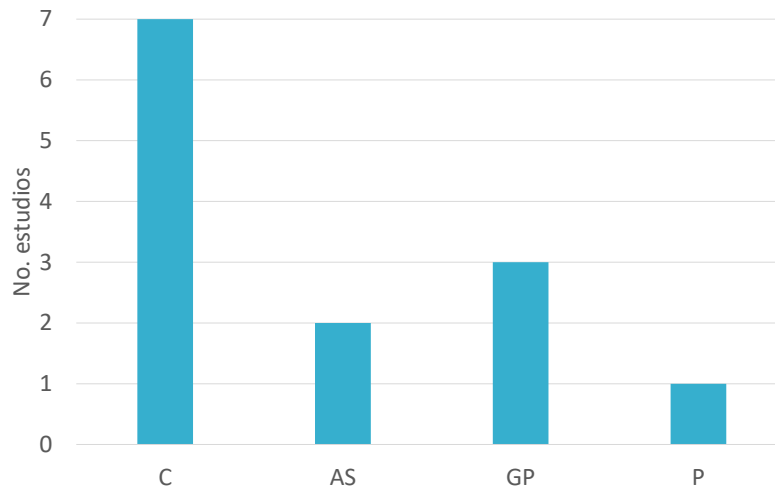


Figura 3.2: Tipos de sincronización utilizadas con control difuso.

Estudio		Características de los sistemas				
Año	Autor	Idénticos	Diferentes	Commens.	No commens.	Atractor oculto
2011	Lin and Lee	✓	✓	✓		
2013	Chen et al.		✓	✓		
2015	Wang et al.		✓	✓		
2016	Boukroune et al.	✓	✓	✓	✓	
2016	Muthukumar et al.	✓	✓	✓		
2017	Liu et al.	✓		✓		
2019	Boubellouta et al.	✓	✓	✓	✓	
2019b	Zhou et al.		✓		✓	
2019a	Zhou et al.		✓		✓	

Tabla 3.7: Características de los sistemas fraccionarios caóticos sincronizados mediante control difuso

## Capítulo 4

# Propuesta de investigación

En esta sección presentamos la metodología y un plan de trabajo para desarrollar la presente investigación. Además, incluimos un plan de publicaciones.

### 4.1 Metodología

El primer paso es establecer el tipo de sincronización que se utilizará para realizar el diseño del control difuso. Como se indica en la sección 2.6 existen diversos tipos de sincronización y su principal diferencia está en la definición del error.

De acuerdo con la sección 2.6 y la literatura revisada, en este trabajo reportamos doce tipos de sincronización. La sincronización completa es la más empleada por ser una de las más sencillas en cuanto al número y tipo de operaciones matemáticas. Sin embargo, lo anterior repercute negativamente en el nivel de seguridad que otorga este tipo de sincronización al ser utilizados en esquemas de comunicación segura. Tratando de aliviar este problema, otros tipos de sincronización se han propuesto con más operaciones matemáticas, por ejemplo, la generalizada proyectiva o la proyectiva híbrida de estados completos.

Se analizarán los diferentes tipos de sincronización encontrados en la revisión de la literatura para elegir al que proporcione mayor complejidad en cuanto al tipo y número de las operaciones matemáticas implicadas.

Aparte del tipo de sincronización es importante seleccionar un tipo de derivada fraccionaria. De estas elecciones se desprenden propiedades específicas de estabilidad fraccionaria en las que se basa el diseño del control para llevar a cabo la sincronización. Aunque existen diversas definiciones de derivada fraccionaria, en la literatura revisada encontramos que las más utilizadas son la de Caputo y la de Riemann-Liouville.

Una vez seleccionado el tipo de sincronización y la derivada fraccionaria se puede diseñar el control difuso a través de las propiedades de estabilidad fraccionaria. Un esquema general de la sincronización se encuentra en la figura 4.1.

Ahora bien, las áreas de conocimiento que están estrechamente relacionadas con el problema descrito en la sección 1.3 son la teoría de sistemas dinámicos, la teoría del caos, control difuso y la

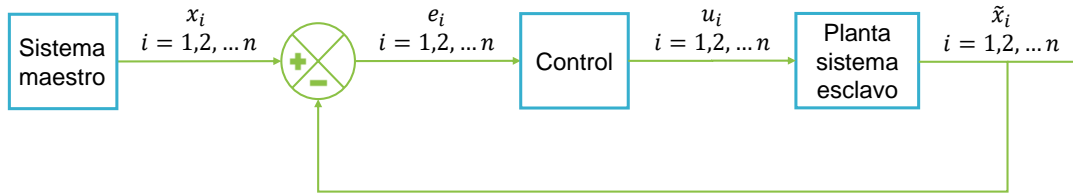


Figura 4.1: Esquema de sincronización. El diagrama presenta un control realimentado en donde la(s) variable(s) de salida(s)  $\tilde{x}_i$  deben seguir a las referencias (set points) que son generadas por el sistema maestro  $x_i$ . La variable  $e_i$  es el error que se define en función de la(s) referencia(s) y las variables de salida. La variable  $u_i$  es el control (variable externa del sistema esclavo) que obliga a la variable de salida a seguir su referencia.

integración numérica de sistemas fraccionarios, tal como se muestra en la figura 4.2. Los sistemas dinámicos modelan sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo, este tipo de sistemas pueden ser lineales o no lineales, y pueden estar descritos mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, parciales, fraccionarias, etc. Algunos de estos sistemas pueden presentar comportamientos caóticos que conciernen a otra área de conocimiento: la teoría del caos, la cual estudia y caracteriza a los sistemas caóticos a través de sus exponentes de Lyapunov, de sus espacios de fase o de sus atractores. Existen estudios que sólo se concentran en estudiar y localizar a los atractores ocultos que se pueden presentar estos sistemas. Sin embargo, cuando se pretende sincronizar un sistema fraccionario caótico se recurre a las técnicas de control. Tal como se indica en la revisión de la literatura, diversas técnicas se han empleado para este fin, en este trabajo se optó por el control difuso debido al potencial que posee para sincronizar sistemas fraccionarios caóticos con atractores ocultos (Wang et al., 2015, 2016; Aguiar et al., 2016; Muthukumar et al., 2016). Además, para llevar a cabo la sincronización es imprescindible contar con algún método de integración que solucione numéricamente los sistemas fraccionarios caóticos con atractores ocultos.

El procedimiento metodológico previsto para el desarrollo de la investigación propuesta es el siguiente:

1. *Recopilación de sistemas caóticos fraccionarios con atractores ocultos.* En bases de datos de artículos de investigación se buscarán estudios que utilicen sistemas fraccionarios con atractores ocultos con y sin puntos de equilibrio.
2. *Investigación de los tipos de sincronización.* En artículos relacionados con la sincronización caótica se investigarán los diferentes tipos de sincronización, y se evaluarán de acuerdo a sus características, por ejemplo, el tipo de operaciones matemáticas que utilicen. También, se analizarán estudios que apliquen la sincronización caótica, para detectar cuáles son los tipos de sincronización más robustos en este tipo de trabajos.
3. *Análisis y selección de la definición de derivada fraccionaria.* En artículos de sistemas fraccionarios caóticos se identificarán las definiciones de derivada que se emplean y la razón por la que

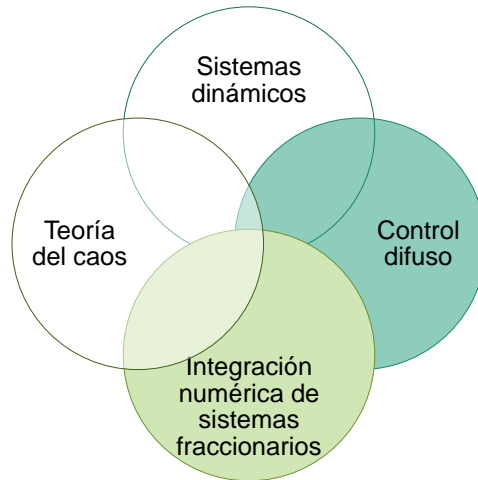


Figura 4.2: Áreas de conocimiento estrechamente relacionadas con el problema de la sincronización caótica fraccionaria utilizando control difuso

se emplean, para analizar cuál definición es conveniente a utilizar en nuestro caso.

4. *Selección de métodos numéricos para integrar sistemas fraccionarios.* Primero, se realizará una búsqueda para identificar los diferentes métodos numéricos que se emplean para integrar los sistemas fraccionarios caóticos. Además, se elegirán los que cuenten con código disponible y validado, para analizar sus ventajas y desventajas y seleccionar entre estos métodos de integración un método adecuado dentro de nuestro contexto.
5. *Análisis de estabilidad para el diseño del control.* Para realizar el diseño del control, primero es necesario elegir una técnica de control entre las variantes de control difuso, después realizar el análisis de estabilidad y finalmente el diseño del control. Primero se realizará un análisis de la literatura relacionada con las técnicas de control difuso para sincronizar sistemas fraccionarios y se elegirá una tomando criterios como facilidad de empleo, robustez de la técnica, etc. Segundo, el análisis de estabilidad se llevará a cabo utilizando la teoría de Lyapunov o la teoría de estabilidad de sistemas fraccionarios. Tercero, mediante el análisis de estabilidad se desarrollará un nuevo control para sincronizar sistemas caóticos fraccionarios con atractores ocultos.
6. *Sincronización los sistemas seleccionados.* Un esquema de sincronización está dado en la figura 4.1. En el recuadro que dice control, se colocará el control diseñado en el paso anterior. Por el momento, la codificación de la sincronización se llevará a cabo en Matlab vR2017 (MathWorks USA), posteriormente se analizarán las posibilidades de realizarlo en otros lenguajes de programación como C o C++, que son más eficientes para llevar a cabo operaciones matemáticas.
7. *Evaluación de la sincronización realizada.* Para evaluar la sincronización propuesta, se medirán los tiempos en los que el error se estabiliza, para realizar la comparación con otros estudios que sincronicen sistemas fraccionarios caóticos con atractores ocultos.

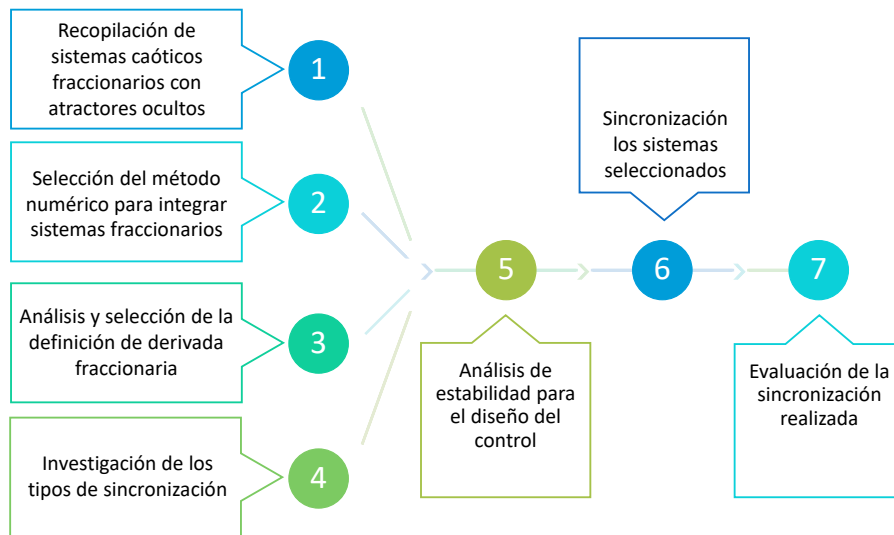


Figura 4.3: Esquema de la metodología propuesta, cada uno de los pasos está relacionado con los objetivos específicos.

En la figura 4.3 presentamos un esquema de la metodología propuesta, en el que cada uno de los pasos está relacionado con los objetivos específicos. Los primeros cuatro pasos de la metodología son independientes entre sí, por lo que se pueden realizar simultáneamente. Sin embargo, los siguientes pasos son consecutivos.

## 4.2 Plan de trabajo

El diagrama de Gantt, con el calendario de las actividades y las fechas de las publicaciones, se presenta en la figura 4.4.

## 4.3 Plan de publicaciones

Las publicaciones esperadas y sus objetivos se presentan a continuación.

1. Artículo de conferencia.

La conferencia elegida es *18th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM)*. El objetivo es presentar los avances preliminares. La fecha límite para someter es 26 julio de 2020.

2. Artículo de revista.



La revista elegida es *Fuzzy Sets and Systems*. El objetivo es presentar los resultados derivados del análisis de estabilidad para sincronizar sistemas fraccionarios caóticos mediante control difuso. La fecha estimada para someter el artículo es mayo 2021.

3. Artículo de revista.

La revista elegida es *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* El objetivo es presentar los resultados de las sincronizaciones de sistemas fraccionarios caóticos con atractores ocultos seleccionados. La fecha estimada para someter el artículo es octubre 2022.

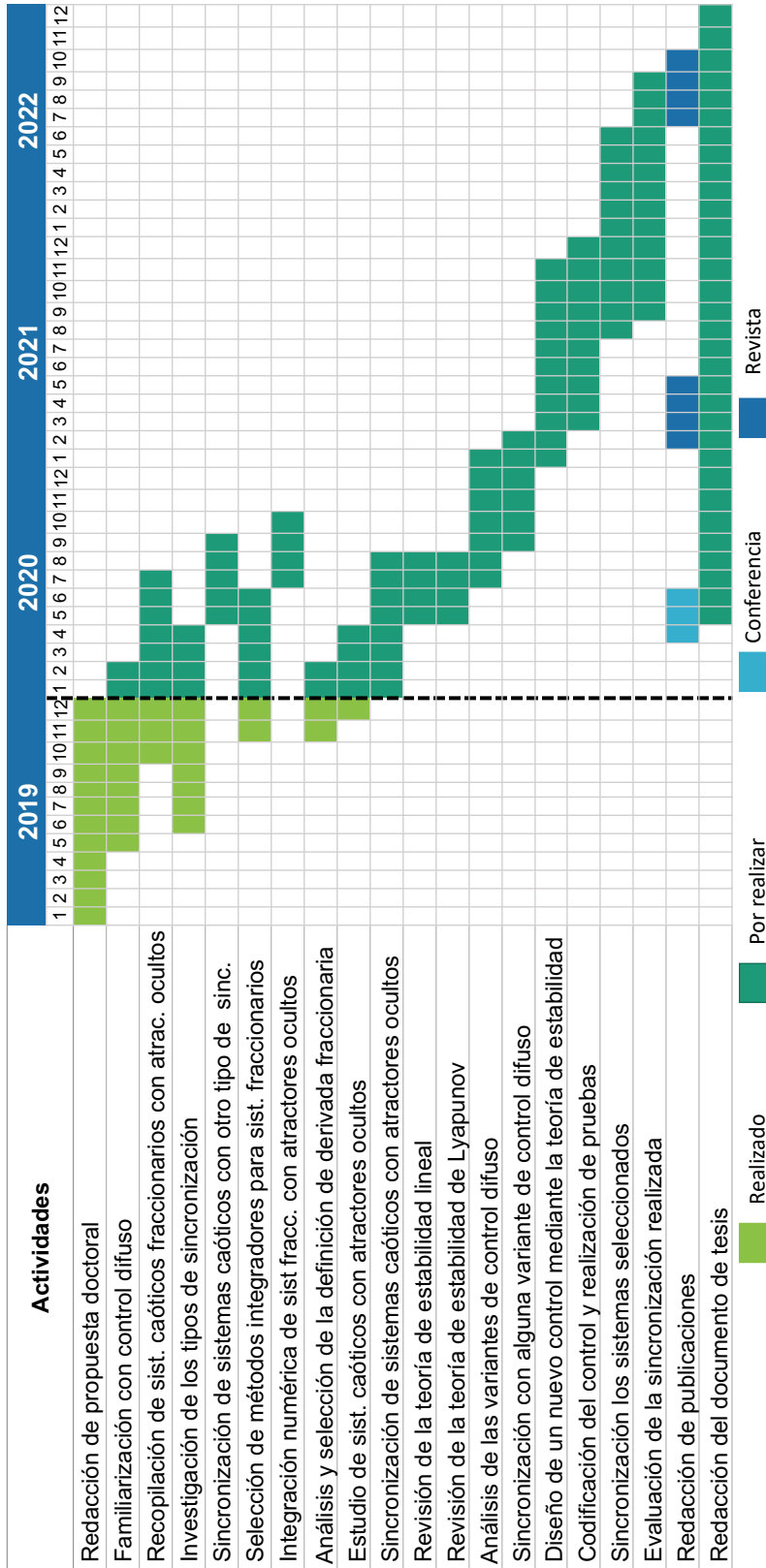


Figura 4.4: Calendario de actividades.

## Capítulo 5

# Resultados preliminares

En esta sección se presentan los avances y los resultados preliminares del presente trabajo de investigación durante el primer año. Dos áreas de conocimiento fueron exploradas, las cuales están sombreadas en la figura 4.2 y corresponden al control difuso y a la integración numérica de sistemas fraccionarios.

A continuación, presentamos tres sincronizaciones de sistemas caóticos de orden entero, resaltando que uno de estos sistemas cuenta con atractores ocultos. Entonces, la contribución es la siguiente:

1. La sincronización difusa completa de un sistema caótico con atractores ocultos, que a nuestro conocimiento es la primera vez que se realiza mediante control difuso.
2. Tal sincronización se realizó utilizando un método integrador basado en polinomios trigonométricos, el cual es más eficiente comparado con otros métodos numéricos (Zaquerros-Martinez, 2018).

Adicionalmente, investigamos los métodos de integración numérica para sistemas fraccionarios y presentamos el método de integración numérica seleccionado.

### 5.1 Control difuso

Para construir un sistema difuso que represente a un sistema no lineal, las no linealidades se expresan como salidas inferidas difusas especificando las funciones de membresía difusa en la premisa y los coeficientes asociados en la consecuencia (Lian et al., 2001b).

Antes de llevar a cabo la sincronización difusa, es necesario representar a los sistemas caóticos en modelos difusos en una región de interés. Una manera de realizarlo es la explicada en la sección 2.4.1.

#### 5.1.1 Sincronización difusa

Al tener los modelos difusos de los sistemas a sincronizar, se procede a realizar la sincronización difusa. A continuación, se presenta la teoría que soporta la sincronización entre dos sistemas caóticos idénticos con diferentes condiciones iniciales mediante control difuso Zhang et al. (2005). Para ello, consideremos al siguiente sistema difuso como el sistema maestro:

$R^i$  : SI  $z_i(t)$  es  $F_i$  ENTONCES

$$\dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x}(t) + b_i, \quad i = 1, 2 \quad (5.1)$$

Y al siguiente sistema difuso como el sistema esclavo:

$R^i$  : SI  $\tilde{z}_i(t)$  es  $F_i$  ENTONCES

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A_i \tilde{\mathbf{x}}(t) + Bu(t) + b_i, \quad i = 1, 2 \quad (5.2)$$

donde  $B$  es una matriz de entrada y  $u(t)$  es el control.

El proceso de defusificación está dado por

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\tilde{z}(t)) \{A_i \tilde{\mathbf{x}}(t) + b_i\} + Bu(t), \quad \mu_i(\tilde{z}(t)) = F_i(\tilde{z}(t)) \quad (5.3)$$

Se define el error como  $e(t) = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ , a partir del cual se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\tilde{z}(t)) \{A_i \tilde{\mathbf{x}}(t) + b_i\} - \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t)) \{A_i \mathbf{x}(t) + b_i\} + Bu(t) \quad (5.4)$$

El objetivo de la sincronización es diseñar el siguiente control difuso:

$$u(t) = - \sum_{i=1}^2 \mu_i(\tilde{z}(t)) \{C_i \tilde{\mathbf{x}}(t) + b_i\} + \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t)) \{C_i \mathbf{x}(t) + b_i\} \quad (5.5)$$

tal que  $\|e(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , de tal manera que el sistema esclavo sigue al sistema maestro. El diseño permite determinar las matrices de ganancias  $C_i$ .

Sustituyendo (5.5) en (5.4), se obtiene

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\tilde{z}(t)) \{(A_i - BC_i) \tilde{\mathbf{x}}(t)\} - \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t)) \{(A_i - BC_i) \mathbf{x}(t)\} \quad (5.6)$$

Seguindo la idea de la linealización, si existen matrices de ganancias tales que

$$\{(A_1 - BC_1) - (A_2 - BC_2)\}^T \times \{(A_1 - BC_1) - (A_2 - BC_2)\} = 0 \quad (5.7)$$

entonces el error total del sistema es linealizado cuando  $\dot{e}(t) = Ge(t)$  mediante el control difuso (5.5), donde  $G = A_1 - BC_1 = A_2 - BC_2$ . Más aún, si  $G < 0$ , el error del sistema es asintóticamente estable.

La sincronización difusa descrita anteriormente está reflejada en el esquema de sincronización de la figura 5.1, el cual es el mismo esquema 4.1 y por cuestiones prácticas se incluyó en este capítulo.

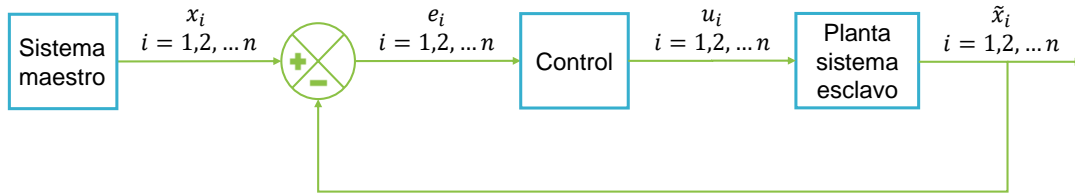


Figura 5.1: Esquema de sincronización. El diagrama presenta un control realimentado en donde la(s) variable(s) de salida(s)  $\tilde{x}_i$  deben seguir a las referencias (set points) que son generadas por el sistema maestro  $x_i$ . La variable  $e_i$  es el error que se define en función de la(s) referencia(s) y las variables de salida. La variable  $u_i$  es el control (variable externa del sistema esclavo) que obliga a la variable de salida a seguir su referencia.

### 5.1.2 Resultados y análisis

En este apartado se presentan los resultados de aplicar la sincronización difusa, explicada en la sección anterior. Primero, sincronizamos el sistema caótico de Rossler de orden cuarto. Posteriormente, el sistema de caótico de Chua sin atractores ocultos y finalmente el sistema caótico de Chua con atractores ocultos. Los resultados obtenidos son prometedores con respecto a la sincronización caótica con atractores ocultos mediante control difuso. Todas las sincronizaciones fueron realizadas en Matlab vR2017 (MathWorks USA).

#### Sistema hipercaótico de Rossler

La sincronización caótica completa fue realizada con control difuso entre dos sistemas caóticos de orden entero representados por las mismas ecuaciones y parámetros, pero diferentes condiciones iniciales. Dado que esta sincronización fue realizada por Zhang et al. (2005), el objetivo de este experimento es familiarizarnos con esta técnica de control.

Los sistemas sincronizados están dados por las ecuaciones (2.3), conocidos como sistemas hipercaóticos de Rossler. Los valores de los parámetros utilizados son  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 3$ , las condiciones iniciales fueron  $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0, 30]^T$  y  $\tilde{\mathbf{x}}_0 = [-25, 14, 0, 18]^T$ . Estos valores fueron obtenidos del trabajo de (Zhang et al., 2005).

El primer paso realizado fue representar al sistema hipercaótico de Rossler mediante un modelo difuso siguiendo la metodología presentada en la sección 2.4.1. Debido a que la no linealidad del sistema de hipercaótico Rossler (2.3) se presenta en la tercera ecuación, se eligió a la variable de estado  $x$  como la variable premisa.

Suponiendo que  $x \in [c - d, c + d]$  y  $d > 0$ , se tiene el siguiente modelo difuso, el cual es considerado el sistema maestro:

$$R^1 : \text{Si } x(t) \text{ es } F_1 \text{ entonces } \dot{\mathbf{x}}(t) = A_1 \mathbf{x}(t) + b_1$$

$$R^2 : \text{Si } x(t) \text{ es } F_2 \text{ entonces } \dot{\mathbf{x}}(t) = A_2 \mathbf{x}(t) + b_2$$

donde  $\mathbf{x} = [x, y, z, w]^T$ ,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.05 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.05 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = b_2 = [0, 0, \beta, 0]^T, F_1(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{d}\right), F_2(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{d}\right), c = -32 \text{ y } d = 50.$$

El sistema esclavo en términos difusos es:

$$R^1 : \text{Si } \tilde{x}(t) \text{ es } F_1 \text{ entonces } \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A_1 \tilde{\mathbf{x}}(t) + Bu(t) + b_1$$

$$R^2 : \text{Si } \tilde{x}(t) \text{ es } F_2 \text{ entonces } \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A_2 \tilde{\mathbf{x}}(t) + Bu(t) + b_2$$

donde  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}]^T$ ,  $A_1, A_2, b_1, b_2, F_1(x), F_2(x), c$  y  $d$  tienen los mismos valores que en el sistema maestro; la matriz  $B$  es elegida como la matriz identidad.

El siguiente paso es encontrar  $u$  dado por la ecuación (5.5). Para ello es necesario resolver la ecuación (5.7), la cual fue resuelta mediante el *toolbox* LMI (*Linear Matrix Inequalities*) de Matlab. Eligiendo la matriz de entrada  $B$  como la matriz identidad, las matrices de ganancias calculadas mediante el *toolbox* son:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.55 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -49.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.55 \end{pmatrix}$$

Es importante mencionar que algunos resultados numéricos proporcionados por el *toolbox* LMI de Matlab fueron valores menores o iguales a  $1.01 \times 10^{-18}$ , en este documento por cuestiones prácticas los reportamos con el valor de 0. Además, las matrices de ganancias reportadas en este trabajo presentan diferencias al compararlas con el trabajo de (Zhang et al., 2005) a pesar de trabajar con los mismos parámetros. Lo anterior se debe principalmente a que la forma de expresar la ecuación (5.7) en desigualdades matriciales lineales no es única (Tanaka et al., 1998).

Después de estas breves aclaraciones, continuamos explicando la forma en que se llevó a cabo el experimento. Integramos numéricamente los sistemas caóticos utilizando el método numérico basado en polinomios trigonométricos, el cual fue analizado en (Zaqueros-Martinez, 2018), donde concluyeron que es más eficiente comparado con otros métodos numéricos comúnmente utilizados como los Runge-Kutta. De aquí en adelante este método numérico será nombrado brevemente *método de Gautschi*.

Las condiciones iniciales utilizadas fueron  $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0, 30]^T$  y  $\tilde{\mathbf{x}}_0 = [-25, 14, 0, 18]^T$  para el sistema maestro y esclavo, respectivamente. Sustituyendo las matrices de ganancias en el control  $u$ , dado por la ecuación (5.5), y siguiendo el esquema de sincronización dado por la figura 5.1 obtuvimos los siguientes resultados.

La gráfica 5.2 muestra el espacio de fase de la sincronización realizada, el sistema esclavo (línea roja) sigue el mismo comportamiento del sistema maestro (línea azul) a pesar de iniciar en puntos dife-

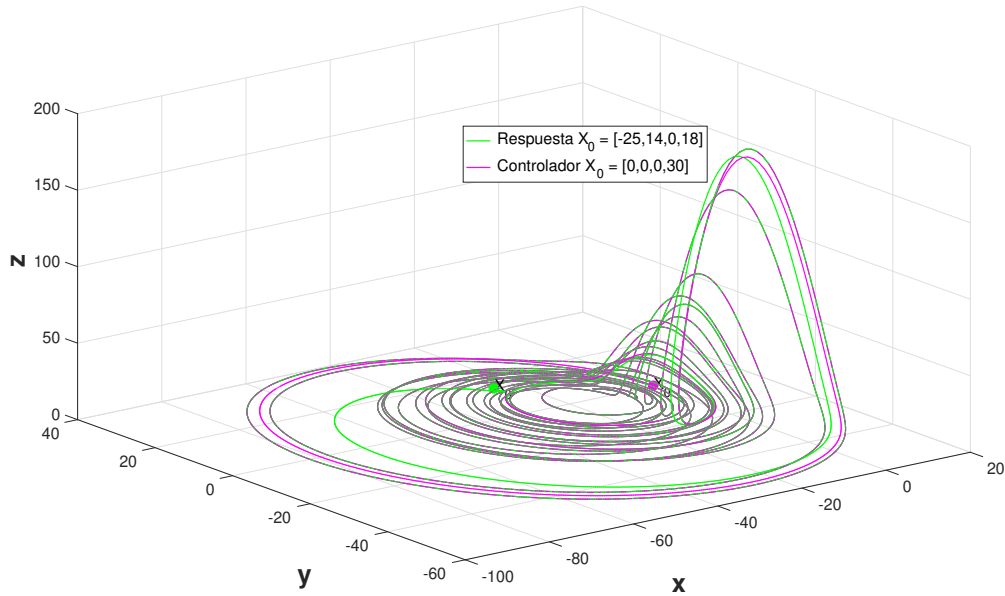


Figura 5.2: Espacio de fase del sistema hipercaótico de Rossler. El sistema esclavo (línea roja) sigue al sistema maestro (línea azul) a pesar de tener diferentes puntos iniciales.

rentes, y además, ambos forman el atractor extraño característico del sistema hipercaótico de Rossler. La gráfica 5.3 muestra los errores en la sincronización en cada una de las variables de estado. Los errores tienden a cero alrededor de las primeras 1500 iteraciones.

Después de analizar los resultados, concluimos que el objetivo se alcanzó, puesto que  $\|e(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , ver gráfica 5.3, en consecuencia sincronizamos exitosamente al sistema hipercaótico de Rossler mediante control difuso.

### Sistema de Chua clásico

Existen variantes del sistema de Chua clásico de orden entero, éstas pueden tener diferencias en las ecuaciones que los expresan. Algunas variantes del sistema de Chua clásico han sido sincronizadas mediante control difuso (Lian et al., 2001a,b); sin embargo, el sistema dado en la sección 2.3.2, a nuestro conocimiento, no se ha sincronizado mediante control difuso.

En este experimento, sincronizamos el sistema de Chua de orden entero, presentado en la sección 2.3.2, con los parámetros del atractor clásico de Chua, los cuales son  $\alpha = 9.3516$ ,  $\beta = 14.7903$ ,  $\gamma = 0.0161$ ,  $m_0 = -1.1384$ ,  $m_1 = -0.7225$ . Utilizando las siguientes condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0 = [2.0848, 0.0868, -2.819]^T$  y  $\tilde{\mathbf{x}}_0 = [0.01, 0, 0]^T$  (Kuznetsov et al., 2016).

Análogamente al experimento anterior realizamos la sincronización caótica completa del sistema de Chua mediante control difuso.

Como primer paso expresamos el sistema de Chua en términos difusos apoyados en la metodología dada por (Lian et al., 2001b), explicada en la sección 2.4.1.

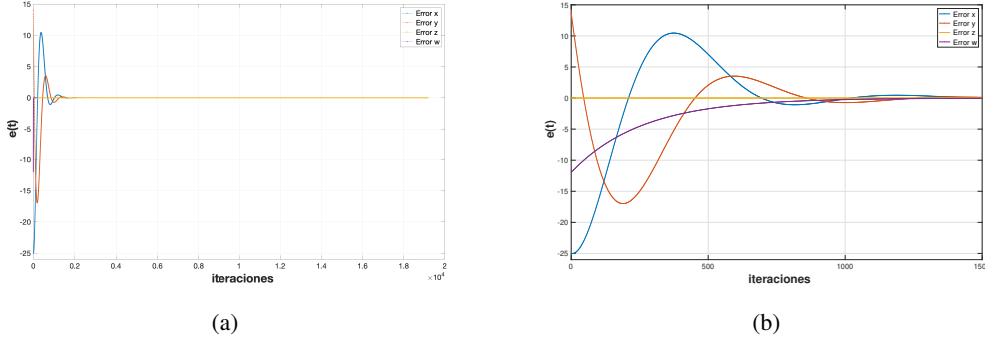


Figura 5.3: Errores de la sincronización del sistema hipercaótico de Rossler. (a) Errores de sincronización de cada variable de estado del sistema hipercaótico de Rossler durante toda la simulación. (b) Ampliación de la gráfica. Los errores de sincronización se estabilizan en el valor 0 en las primeras 1500 iteraciones.

La variable de estado  $x$  fue elegida como variable premisa debido a que en la primera ecuación de 2.3.2 se presenta una función definida a trozos que depende de  $x$ .

Suponiendo que  $x \in [-d, d]$  y  $d > 0$ , se tiene el siguiente modelo difuso, que es considerado el sistema maestro:

$$R^1 : \text{Si } x(t) \text{ es } F_1 \text{ entonces } \dot{\mathbf{x}}(t) = A_1 \mathbf{x}(t) + b_1$$

$$R^2 : \text{Si } x(t) \text{ es } F_2 \text{ entonces } \dot{\mathbf{x}}(t) = A_2 \mathbf{x}(t) + b_2$$

donde  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ ,

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha(d-1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\alpha(d+1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix},$$

$$b_1 = b_2 = 0, \quad F_1(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\phi(x)}{d} \right), \quad F_2(x) = 1 - F_1(x), \quad d = 1.1 \text{ y}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{\psi(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ m_0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Mientras que el sistema esclavo es:

$$R^1 : \text{Si } \tilde{x}(t) \text{ es } F_1 \text{ entonces } \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A_1 \tilde{\mathbf{x}}(t) + Bu(t) + b_1$$

$$R^2 : \text{Si } \tilde{x}(t) \text{ es } F_2 \text{ entonces } \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A_2 \tilde{\mathbf{x}}(t) + Bu(t) + b_2$$

donde  $\tilde{\mathbf{x}} = [x, y, z]^T$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $d$  y  $\phi(x)$  tienen los mismos valores del sistema maestro, mientras que la matriz  $B$  es elegida como la matriz identidad.

Resolviendo la ecuación 5.7 mediante el *toolbox* LMI obtuvimos las siguientes matrices de ganancias:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1.43516 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4839 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -19.13836 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4839 \end{pmatrix}$$



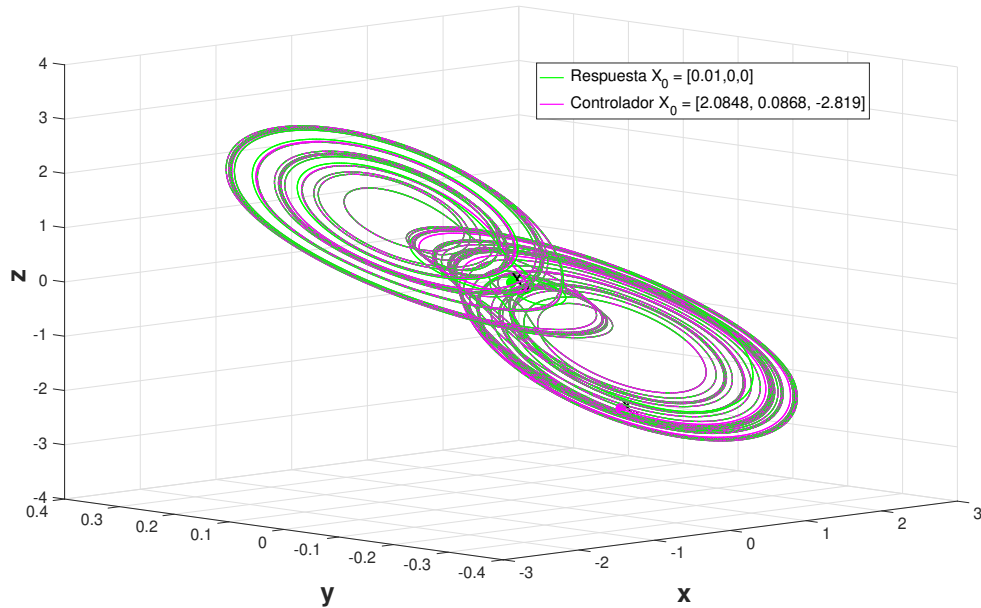


Figura 5.4: Espacio de fase del sistema de Chua clásico. Aunque los sistemas caóticos inician con diferentes condiciones iniciales, el sistema esclavo (línea roja) sigue al sistema maestro (línea azul).

Sustituimos las matrices de ganancias en el control  $u$  (5.5). Siguiendo el esquema 5.1 llevamos a cabo la sincronización, utilizando también el método de Gautschi. Los resultados obtenidos son los siguientes.

El espacio de fase del sistema de Chua clásico está graficado en la figura 5.4, en el cual el sistema esclavo (línea roja) sigue al sistema maestro (línea azul) a pesar de que los sistemas parten de diferentes condiciones iniciales. Además, ambos sistemas forman el atractor extraño que caracteriza al sistema caótico de Chua clásico.

Los errores de sincronización de cada variable de estado se encuentran en la gráfica 5.5, de la gráfica se tiene que  $\|e(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Con lo anterior concluimos que la sincronización caótica difusa entre los sistemas de Chua clásico, dados por las ecuaciones 2.3.2, fue realizada con éxito.

### Sistema de Chua con atractores ocultos

Al cambiar los parámetros de los sistemas caóticos se pueden presentar atractores ocultos. Tal es el caso del sistema de Chua de orden entero (dado en la sección 2.3.2), el cual presenta un atractor oculto con los siguientes parámetros:  $\alpha = 8.4562$ ,  $\beta = 12.0732$ ,  $\gamma = 0.0052$ ,  $m_0 = -0.1768$ ,  $m_1 = -1.1468$  (Kiseleva et al., 2018).

Al intentar sincronizar sistemas con atractores ocultos puede darse el caso en el que la sincronización no sea exitosa (Kuznetsov et al., 2016). Kuznetsov et al. (2016) pretendían sincronizar al sistema de Chua con parámetros que dan lugar a un atractor oculto, pero no lo lograron. Lo anterior se debe

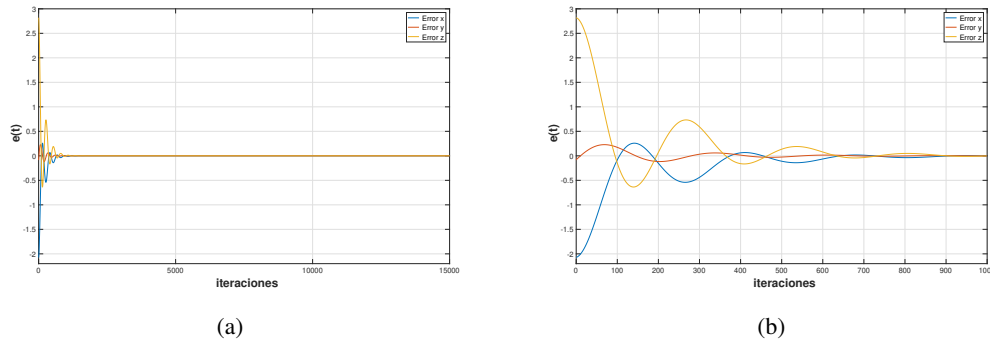


Figura 5.5: Errores de la sincronización del sistema caótico de Chua clásico. (a) Errores de sincronización del sistema de Chua clásico durante toda la simulación. (b) Ampliación de la gráfica. Los errores de sincronización se estabilizan en el valor 0 en las primeras 1000 iteraciones de la simulación.

a la elección inadecuada de la técnica de control: acoplamiento lineal a través de la segunda ecuación del sistema de Chua  $K(y - \hat{y})$ . Puesto que, en la literatura se ha reportado que esta técnica falla al sincronizar ciertas configuraciones de sistemas caóticos con el enfoque maestro-esclavo Huang et al. (2009). Por esta razón, los autores insisten en la importancia de elegir adecuadamente al control para tener sincronizaciones exitosas Kuznetsov et al. (2016).

Con este preámbulo, propusimos utilizar una estrategia de control difuso para sincronizar dos sistemas de Chua con atractores ocultos con los parámetros anteriormente dados pero con diferentes condiciones iniciales. Las cuales fueron  $\mathbf{x}_0 = [-3.7727, -1.3511, 4.6657]^T$  y  $\tilde{\mathbf{x}}_0 = [0.01, 0, 0]^T$ , tomadas del trabajo de (Kuznetsov et al., 2016).

Dado que el sistema de Chua de orden entero con atractores ocultos tiene las mismas ecuaciones que el sistema de Chua clásico de orden entero, pero con otros valores en los parámetros, los modelos difusos son los mismos excepto por los valores de los parámetros. En consecuencia, los sistemas maestro y esclavo para llevar a cabo la sincronización caótica son los mismos que el caso del sistema de Chua clásico, pero con parámetros distintos: los que dan lugar al atractor oculto.

De lo anterior, las matrices de ganancias son diferentes a las reportadas con el sistema de Chua clásico porque se tienen otros valores en los parámetros del sistema. Las matrices de ganancias para el sistema de Chua con atractores ocultos, calculadas mediante el *toolbox* LMI son:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1.34562 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.49479 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -17.258019 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.49479 \end{pmatrix}$$

Al sustituir las matrices de ganancias en el control (5.5), y utilizando el método de integración de Gautschi sincronizamos el sistema de Chua con atractores ocultos, siguiendo el esquema de la figura 5.1. Los resultados obtenidos se presentan a continuación.

El espacio de fase del atractor oculto de Chua está mostrado en la figura 5.6, el cual coincide con las gráficas mostradas por Kiseleva et al. (2018). Además, el sistema esclavo (línea roja) sigue al sistema maestro (línea azul).

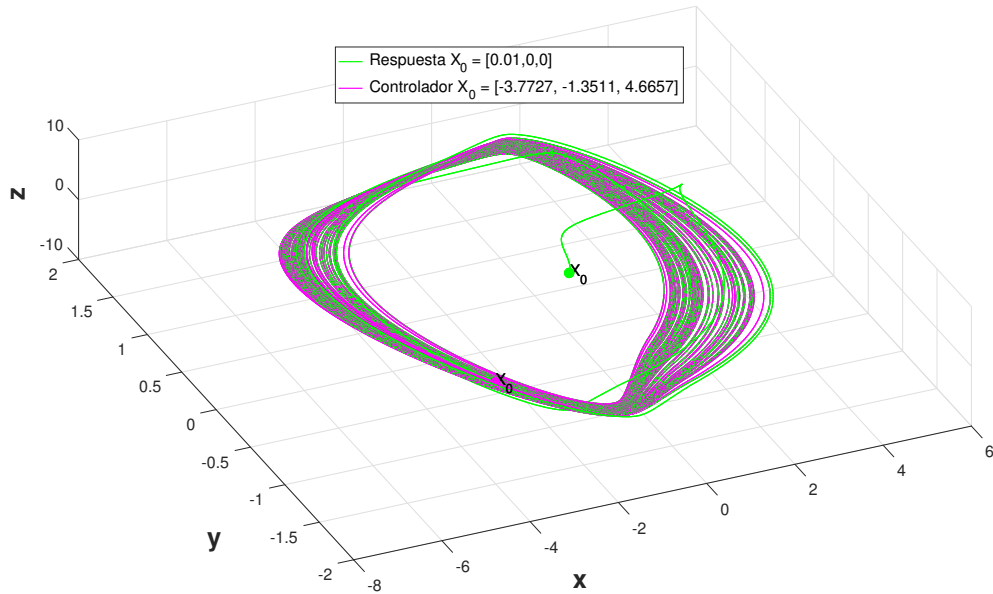


Figura 5.6: Espacio de fase del sistema de Chua con atractores ocultos. El sistema esclavo (línea roja) sigue al sistema maestro (línea azul) a pesar de tener condiciones iniciales diferentes.

Mientras que en la gráfica 5.7 se presentan los errores de sincronización por cada variable de estado. Como  $\|e(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , concluimos que es posible sincronizar el sistema de Chua de orden entero con atractores ocultos mediante la estrategia de control difuso. Por medio de este ejemplo, mostramos la factibilidad de sincronizar sistemas caóticos con atractores ocultos donde fallan otras estrategias de control.

A manera de resumen, en la Tabla 5.1 mostramos las características de los sistemas sincronizados.

Sistema sincronizado	Caótico	Orden entero	Con puntos de equilibrio	Con atractores ocultos
Sistema hipercaótico de Rossler	✓	✓	✓	
Sistema de Chua clásico	✓	✓	✓	
Sistema de Chua con atractores ocultos	✓	✓	✓	✓

Tabla 5.1: Tabla que muestra las características de los sistemas sincronizados.

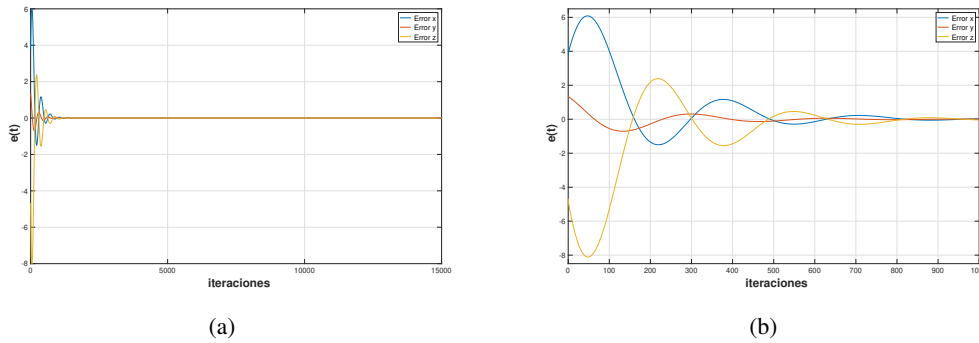


Figura 5.7: Errores de la sincronización del sistema caótico de Chua con atractores ocultos. (a) Errores de sincronización del sistema de Chua con atractores ocultos durante toda la simulación. (b) Ampliación de la gráfica. Los errores de sincronización se estabilizan en el valor 0 en las primeras 1000 iteraciones de la simulación.

## 5.2 Integración numérica de sistemas fraccionarios

Para llevar a cabo la sincronización caótica de sistemas fraccionarios es necesario contar con algún(os) método(s) numérico(s) para integrarlos numéricamente. En esta sección, presentamos los resultados de la investigación realizada de los métodos numéricos para integrar sistemas fraccionarios.

En la literatura revisada encontramos que existen diversos métodos numéricos para llevar a cabo la integración numérica de ecuaciones fraccionarias. Que tales métodos presenten características como precisión, confiabilidad y eficiencia es una tarea mucho más compleja que integrar sistemas de orden entero (Garrappa, 2018).

Entre los métodos numéricos utilizados para integrar sistemas fraccionarios encontramos: el método de descomposición de Adomian (Wang et al., 2019a; Li and Wu, 2019), el método fraccionario Adams-Bashforth-Moulton (Kiani-B et al., 2009; Pham et al., 2017a; Kingni et al., 2017; Boubellouta et al., 2019) y el método fraccionario de Euler (Ouannas et al., 2018).

Puesto que este trabajo de investigación no se centra en codificar o implementar métodos integradores para sistemas fraccionarios, se buscaron las codificaciones de los métodos anteriores. En el estudio realizado por Garrappa (2018), quién hizo una revisión de las familias más efectivas de métodos numéricos para integrar sistemas de ecuaciones diferenciales fraccionarias proporcionando las rutinas en Matlab para utilizarlas.

### 5.2.1 Resultados y análisis

Utilizando los métodos de integración proporcionados por Garrappa (2018) realizamos tres experimentos. El objetivo del primer experimento fue familiarizarnos con las rutinas de integración, mientras que en el segundo experimento integramos numéricamente un sistema fraccionario caótico, y en el tercero integramos un sistema fraccionario caótico con atractores ocultos. En esta sección se presentan los resultados de los tres experimentos.

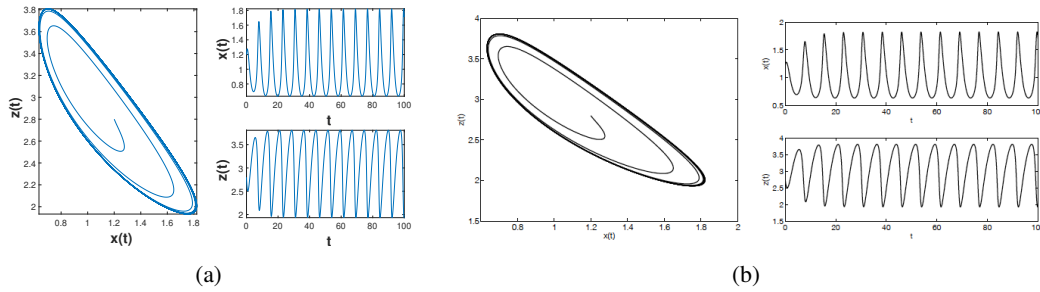


Figura 5.8: Solución numérica del sistema de *Brusselator*. (a) Plano de fase y las variables de estado contra el tiempo de simulación que obtuvimos al realizar la integración numérica del sistema de *Brusselator*. (b) Gráficas procedentes del trabajo de Garrappa (2018). Los sistemas fueron integrados con los mismos parámetros y mismas condiciones iniciales. Las gráficas mostradas en (a) y (b) muestran comportamientos similares.

### Sistema fraccionario no lineal de *Brusselator*

El sistema fraccionario no lineal de *Brusselator* dado en la sección 2.3.8 fue integrado numéricamente con un método predictor-corrector basado en reglas de integración del producto (Garrappa, 2018). La rutina utilizada fue *FDE\_PII2\_PC*. Cabe resaltar que este sistema no es caótico y ya había sido integrado en (Garrappa, 2018), por lo que el objetivo de este experimento es familiarizarnos con las rutinas numéricas.

Los parámetros utilizados en este experimento fueron  $\alpha_1 = 0.8$ ,  $\alpha_2 = 0.7$ ,  $A = 1.0$ ,  $B = 3.0$ , las condiciones iniciales  $x_0 = 1.2$ ,  $z_0 = 2.8$ , durante 100 unidades de tiempo de simulación.

Las gráficas de la figura 5.8 muestran el comportamiento de la solución del sistema de *Brusselator*, en 5.8(a) se encuentran el plano de fase y las variables de estado contra el tiempo de simulación que realizamos en este trabajo, y en (b) las gráficas obtenidas por Garrappa (2018). Estas soluciones numéricas presentan el mismo comportamiento.

### Sistema caótico fraccionario del dinamo

El sistema fraccionario del dinamo, presentado en la sección 2.3.9, fue integrado con el método numérico utilizado en el ejercicio anterior.

Los valores de los parámetros empleados fueron:  $\alpha = 0.97$ ,  $\mu = 2$ ,  $\gamma = 1$ , las condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0 = [1, 2, -3]$ , durante 500 unidades de tiempo. Los parámetros y las condiciones iniciales fueron tomadas de (Boubellouta et al., 2019; Wang et al., 2009). En el trabajo de (Boubellouta et al., 2019) este sistema fraccionario fue integrado mediante una variante del método fraccionario Adams-Bashforth-Moulton utilizando Matlab, mientras que en (Wang et al., 2009) no indican el método numérico utilizado.

Los resultados de la integración numérica son los siguientes. En la figura 5.9 están las gráficas del plano de fase  $xz$ . En 5.9(a) se muestra la que realizamos en este trabajo, y en (b) la procedente del trabajo de Wang et al. (2009). En estos resultados numéricos el comportamiento caótico que obtuvimos es consistente con el mostrado en (Wang et al., 2009).

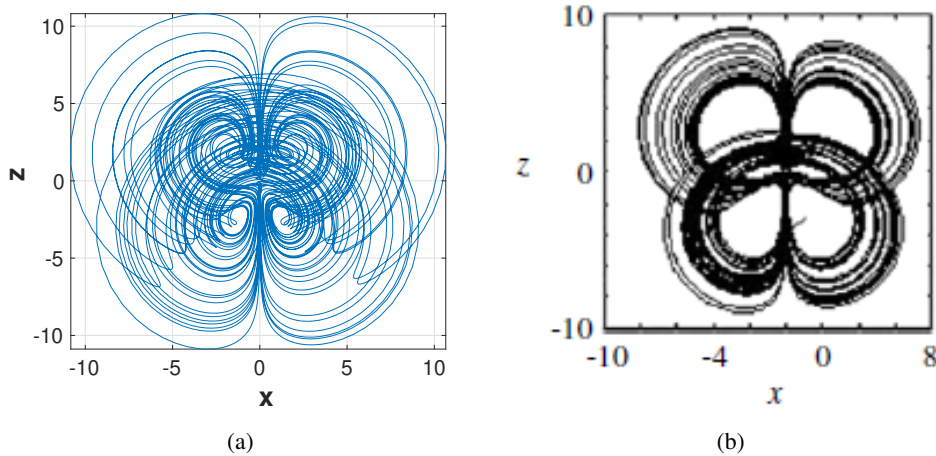


Figura 5.9: Solución numérica del sistema del dinámico. (a) Plano de fase  $xz$  obtuvimos al realizar la integración numérica del sistema del dinámico. (b) Gráfica procedente del trabajo de Wang et al. (2009). Los sistemas fueron integrados con los mismos parámetros y condiciones iniciales. Las gráficas mostradas en (a) y (b) muestran atractores caóticos similares.

### Sistema caótico fraccionario con atractores ocultos de Borah

El sistema caótico fraccionario con atractores ocultos proporcionado por Borah et al. (2017), presentado en la sección 2.3.10, fue integrado numéricamente con el método numérico utilizado en los experimentos anteriores.

Los parámetros utilizados fueron  $\alpha = 0.98$ ,  $a = 0.8696$ ,  $b = 1$ ,  $m = 0.756144$ ,  $c = 10.5$ , las condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0 = [-0.08, -1.02, -0.49]$ , durante 500 unidades de tiempo de simulación. Los parámetros y las condiciones iniciales fueron tomadas de (Borah et al., 2017), donde también integran este sistema fraccionario pero no indican el método numérico empleado.

En la figura 5.10 se muestran diferentes vistas del espacio de fase. En 5.10(a) se encuentran las gráficas que obtuvimos en este trabajo, y en (b) las procedentes del trabajo de (Borah et al., 2017).

Los resultados numéricos indican que el comportamiento de la solución numérica que obtuvimos es consistente con el mostrado en (Borah et al., 2017).

Cabe resaltar que otros métodos numéricos recomendados por el estudio de Garrappa (2018) fueron probados. Sin embargo, en todos los casos estudio el método numérico con mejor rendimiento fue el que está reportado en este documento.

Recapitulando, en la tabla 5.2 recopilamos las características de los sistemas integrados numéricamente con la el método numérico dado por Garrappa (2018).

Puesto que la integración numérica de sistemas fraccionarios con atractores ocultos es un paso crucial para llevar a cabo la sincronización, con estos experimento mostramos la factibilidad de que el método numérico seleccionado podría servirnos para integrar sistemas fraccionarios caóticos con atractores ocultos.

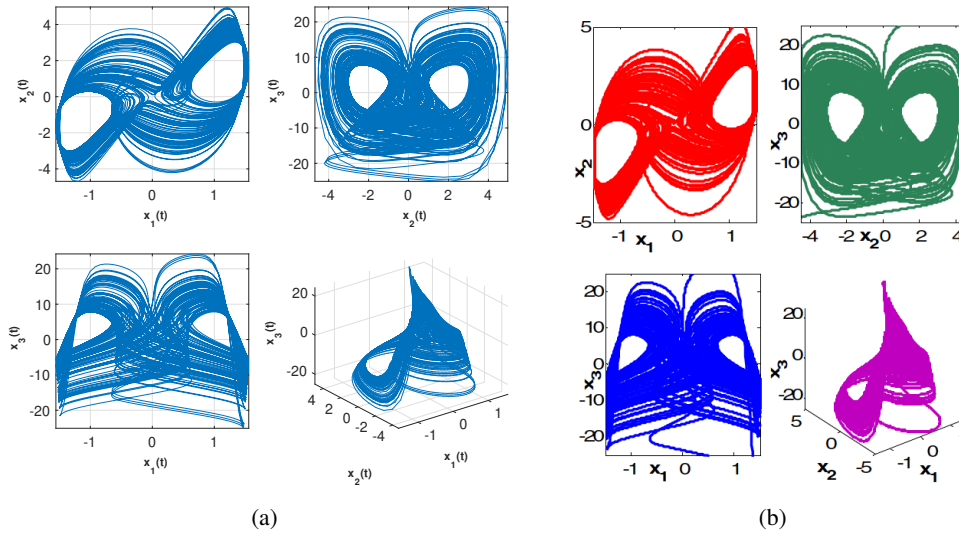


Figura 5.10: Solución numérica del sistema caótico fraccionario con atractores ocultos. (a) Diferentes vistas del espacio de fase del sistema caótico fraccionario con atractores ocultos que obtuvimos al realizar la integración numérica del sistema caótico fraccionario con atractores ocultos. (b) Gráficas procedente del trabajo de Borah et al. (2017). Los sistemas fueron integrados con los mismos parámetros y condiciones iniciales. Las gráficas mostradas en (a) y (b) muestran atractores caóticos similares.

Sistema dinámico	Caótico	Orden fraccionario	Con puntos de equilibrio	Con atractores ocultos
Sistema de Brusselator		✓	✓	
Sistema del dinamo	✓	✓	✓	
Sistema de Borah	✓	✓	✓	✓

Tabla 5.2: Tabla que muestra las características de los sistemas fraccionarios integrados numéricamente con el método numérico proporcionado por Garrappa (2018)

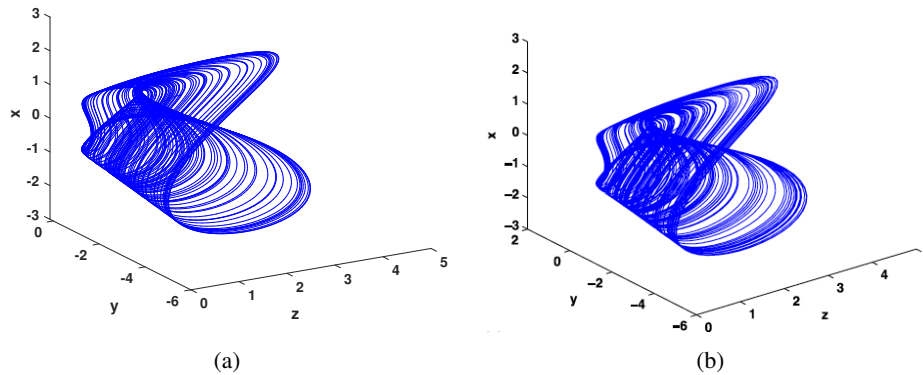


Figura 5.11: Solución numérica del sistema de Wei. (a) Espacio de fase que obtuvimos al realizar la integración numérica del sistema de Wei. (b) Gráfica procedente del trabajo de Wei (2011). Los sistemas fueron integrados con los mismos parámetros y condiciones iniciales. Las gráficas (a) y (b) muestran atractores caóticos similares.

### 5.3 Integración numérica de sistemas caóticos con atractores ocultos

Cinco sistemas caóticos de orden entero con atractores ocultos fueron integrados numéricamente utilizando el método integrador de Gautschi. La manera de proceder fue la siguiente. Primero, buscamos trabajos que reportaran sistemas caóticos con atractores ocultos. Después, con los parámetros y condiciones iniciales proporcionados por los trabajos, procedimos a realizar la integración numérica de tales sistemas, los resultados que obtuvimos se presentan a continuación.

#### 5.3.1 Sistema caótico de Wei

El primer sistema caótico sin puntos de equilibrio integrado fue el sistema de Wei (Wei, 2011), dado en la sección 2.3.3. Por la definición de atractor oculto (definición 6 dada en la sección 2.1), puesto que este sistema no tiene puntos de equilibrio los atractores de este sistema son ocultos.

Los parámetros utilizados fueron  $a = 2$ ,  $c = 1$ ,  $d = 0.35$  y los valores iniciales fueron  $[-1.86, 0.82, 1.9]$ , los cuales fueron adquiridos del trabajo de Wei (2011). En ambos casos se utilizaron los mismos parámetros y condiciones iniciales. La figura 5.11 compara los resultados obtenidos. En (a) presentamos el espacio de fase que obtuvimos al realizar la integración numérica, mientras que en (b) el proporcionada por Wei (2011). Las gráficas (a) y (b) muestran atractores caóticos similares.

#### 5.3.2 Sistema caótico de Sprott A

El siguiente sistema integrado numéricamente fue el sistema caótico de Sprott A (Jafari et al., 2013) presentado en la sección 2.3.4. Este sistema tampoco cuenta con puntos de equilibrio por lo que tiene atractores ocultos de acuerdo a la definición 6. Con  $a = 1$  como parámetro y con  $[0, 5, 0]$  como condiciones iniciales, tomados del trabajo de Jafari et al. (2013).

Análogamente al resultado anterior, en la figura 5.12 mostramos los resultados obtenidos. En (a)



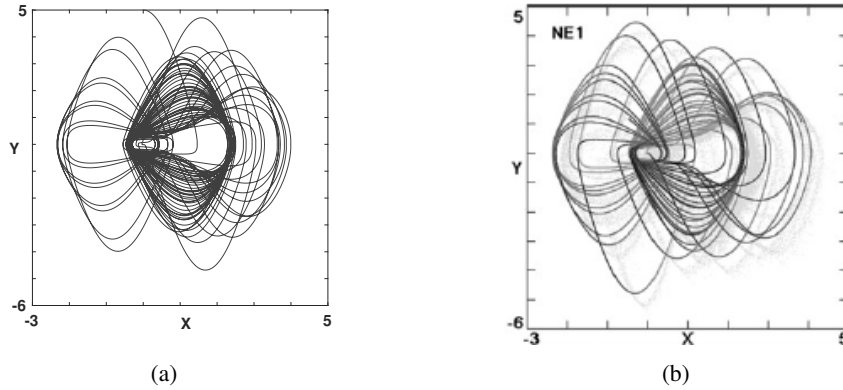


Figura 5.12: Solución numérica del sistema de Sprott A. (a) Plano de fase  $xy$  que obtuvimos al realizar la integración numérica del sistema de Sprott A. (b) Gráfica procedente del trabajo de Jafari et al. (2013). Los sistemas fueron integrados con los mismos parámetros y condiciones iniciales. Las gráficas (a) y (b) muestran atractores caóticos similares.

presentamos el plano fase  $xy$  que obtuvimos al realizar la integración numérica, mientras que en (b) la proporcionada por Jafari et al. (2013). Se utilizaron los mismos parámetros y condiciones iniciales en ambos casos. Las gráficas (a) y (b) muestran atractores caóticos similares.

### 5.3.3 Sistema caótico de Azar

Otro sistema integrado con el método de Gautschi fue el sistema caótico de Azar (Azar et al., 2017), presentado en la sección 2.3.5. Tal sistema no tiene puntos de equilibrio y por ende presenta atractores ocultos (Azar et al., 2017). Los parámetros utilizados fueron  $a = 0.35$ ,  $b = 0.05$  y las condiciones iniciales  $[0.1, 0.1, 0.1]$ , tomados de (Azar et al., 2017).

De manera similar a los resultados anteriores, en la figura 5.13 mostramos los resultados obtenidos. En (a) presentamos las diferentes vistas del espacio de fase que obtuvimos al realizar la integración numérica, mientras que en (b) las proporcionadas por Azar et al. (2017). Los parámetros y condiciones iniciales fueron los mismos que Azar et al. (2017) utilizó. Las gráficas (a) y (b) muestran atractores caóticos similares.

### 5.3.4 Sistema caótico con un término exponencial

El sistema caótico con un término exponencial (Pham et al., 2015), presentado en la sección 2.3.6, es un sistema sin puntos de equilibrio que tiene atractores ocultos (Pham et al., 2015). Los parámetros utilizados fueron  $a = 0.87$ ,  $b = 0.5$ ,  $c = 0.37$ ,  $d = 2.5$ ,  $m = 0.5$  y las condiciones iniciales  $[0.5, -1.2, -9, 2]$ , tomados de (Pham et al., 2015).

En la figura 5.14 mostramos los resultados obtenidos. En (a) presentamos las diferentes vistas del espacio de fase que obtuvimos al realizar la integración numérica, mientras que en (b) las proporcionadas por (Pham et al., 2015). Las condiciones iniciales fueron tomadas del trabajo de Pham et al. (2015), pero no está claro si fueron las mismas que ellos utilizaron para realizar la gráfica (b). A pesar

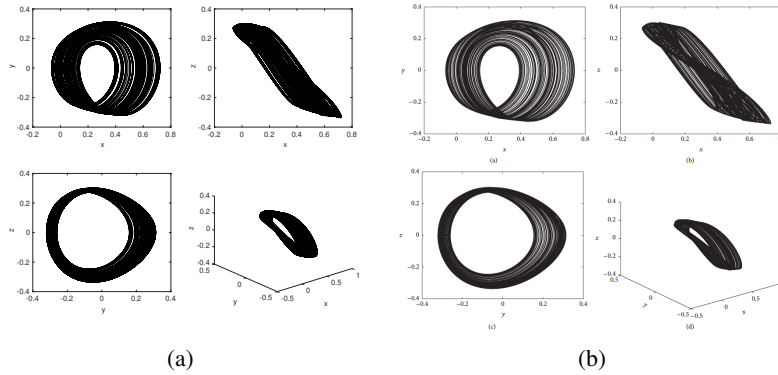


Figura 5.13: Solución numérica del sistema de Azar. (a) Diferentes vistas del espacio de fase que obtuvimos al realizar la integración numérica del sistema de Azar. (b) Gráficas del trabajo de Azar et al. (2017). Los sistemas fueron integrados con los mismos parámetros y mismas condiciones iniciales. Las gráficas mostradas en (a) y (b) muestran atractores caóticos similares.

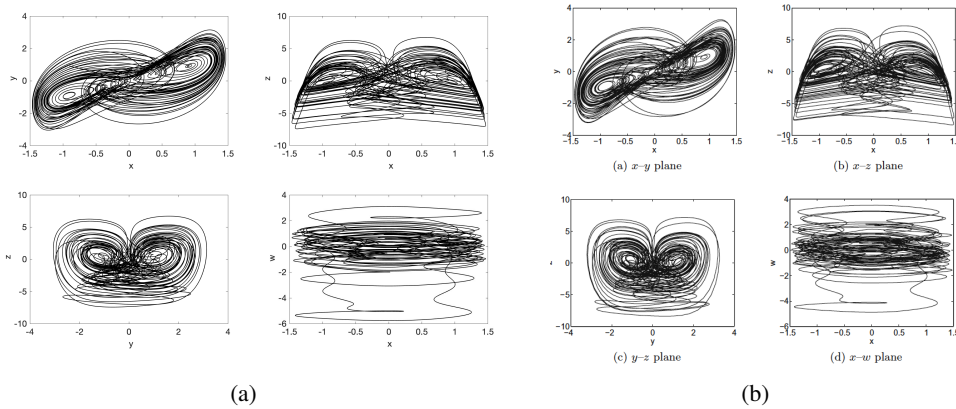


Figura 5.14: Solución numérica del sistema caótico con un término exponencial. (a) Diferentes vistas del espacio de fase que obtuvimos al realizar la integración numérica del sistema caótico con un término exponencial. (b) Gráfica procedente del trabajo de (Pham et al., 2015). Los sistemas fueron integrados con los mismos parámetros. Las gráficas (a) y (b) muestran atractores caóticos similares.

de esto, las gráficas (a) y (b) muestran atractores caóticos similares.

### 5.3.5 Sistema caótico tipo Lorenz

El siguiente sistema integrado numéricamente fue el sistema caótico tipo Lorenz mostrado en la sección 2.3.7. De acuerdo con (Kuznetsov et al., 2016) este sistema presenta atractores ocultos. Los parámetros utilizados fueron  $r = 6.8$ ,  $a = -0.5$  (Kuznetsov et al., 2016) y las condiciones iniciales fueron  $[4.721, 5.02, 4.92]$ .

En la figura 5.15 mostramos los resultados obtenidos. En (a) presentamos el espacio de fase que obtuvimos al realizar la integración numérica, mientras que en (b) el proporcionado por (Kuznetsov et al., 2016). Cabe resaltar que se utilizaron los mismos parámetros pero diferentes condiciones iniciales. A pesar de esto, las gráficas (a) y (b) muestran atractores caóticos similares.

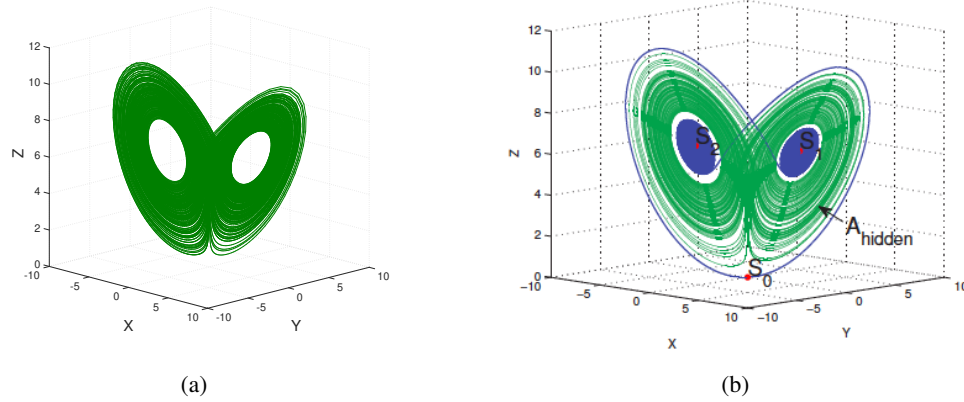


Figura 5.15: Solución numérica del sistema caótico tipo Lorenz. (a) Espacio de fase que obtuvimos al realizar la integración numérica del sistema caótico tipo Lorenz. (b) Gráfica procedente del trabajo de (Kuznetsov et al., 2016). Los sistemas fueron integrados con los mismos parámetros y diferentes condiciones iniciales. A pesar de esto, las gráficas (a) y (b) muestran atractores caóticos similares.

Sistema caótico	Caótico	Orden entero	Sin puntos de equilibrio	Con atractores ocultos
Sistema de Wei	✓	✓	✓	✓
Sistema de Sprott A	✓	✓	✓	✓
Sistema de Azar	✓	✓	✓	✓
Sistema con un término exponencial	✓	✓	✓	✓
Sistema tipo Lorenz	✓	✓		✓

Tabla 5.3: Tabla que muestra las características de los sistemas caóticos con atractores ocultos integrados numéricamente con el método de Gautschi.

De forma resumida, en la tabla 5.3 mostramos las características de los sistemas caóticos con atractores ocultos integrados con el método de Gautschi.

En conclusión, la integración numérica de sistemas caóticos con atractores ocultos es un paso crucial para llevar a cabo la sincronización caótica. Con los experimentos anteriores mostramos que el método numérico de Gautschi es útil para integrar sistemas caóticos de orden entero con atractores ocultos.

# Bibliografía

- Aguiar, B., González, T., and Bernal, M. (2016). A way to exploit the fractional stability domain for robust chaos suppression and synchronization via LMIs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(10):2796–2807.
- Azar, A. T., Volos, C., Gerodimos, N. A., Tombras, G. S., Pham, V.-T., Radwan, A. G., Vaidyanathan, S., Ouannas, A., and Munoz-Pacheco, J. M. (2017). A novel chaotic system without equilibrium: Dynamics, synchronization, and circuit realization. *Complexity*, 2017.
- Bendoukha, S., Abdelmalek, S., and Ouannas, A. (2019). *Secure Communication Systems Based on the Synchronization of Chaotic Systems*, pages 281–311. Springer International Publishing, Cham.
- Borah, M. and Roy, B. K. (2017). Hidden attractor dynamics of a novel non-equilibrium fractional-order chaotic system and its synchronisation control. In *2017 Indian Control Conference (ICC)*, pages 450–455.
- Borah, M., Roy, P., and Roy, B. K. (2017). Synchronisation control of a novel fractional-order chaotic system with hidden attractor. *2016 IEEE Students' Technology Symposium, TechSym 2016*, (1):163–168.
- Boubellouta, A., Zouari, F., and Boukroune, A. (2019). Intelligent fuzzy controller for chaos synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems with input nonlinearities. *International Journal of General Systems*, 48(3):211–234.
- Boukroune, A., Bouzeriba, A., and Bouden, T. (2016). Fuzzy generalized projective synchronization of incommensurate fractional-order chaotic systems. *Neurocomputing*, 173:606–614.
- Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. (2001). *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley and Sons, 7 edition. ISBN: 0-471-31999-6.
- Çavuşoğlu, Ü., Panahi, S., Akgül, A., Jafari, S., and Kaçar, S. (2019). A new chaotic system with hidden attractor and its engineering applications: analog circuit realization and image encryption. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 98(1):85–99.
- Chen, D., Zhao, W., Sprott, J. C., and Ma, X. (2013). Application of Takagi-Sugeno fuzzy model to a class of chaotic synchronization and anti-synchronization. *Nonlinear Dynamics*, 73(3):1495–1505.

- Deng, W. H. and Li, C. P. (2005). Chaos synchronization of the fractional Lü system. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 353(1-4):61–72.
- Dorf, R. C. and Bishop, R. H. (2005). *Sistemas de control moderno*. Pearson Educacion S. A., 10 edition.
- Drazin, P. G. (1992). *Nonlinear systems*, volume 10. Cambridge University Press. ISBN: 9781139172455.
- Dudkowski, D., Jafari, S., Kapitaniak, T., Kuznetsov, N. V., Leonov, G. A., and Prasad, A. (2016). Hidden attractors in dynamical systems. *Physics Reports*, 637:1–50.
- Fang, S., Li, Z., Zhang, X., and Li, Y. (2019). Hidden Extreme Multistability in a Novel No-Equilibrium Fractional-Order Chaotic System and Its Synchronization Control. *Brazilian Journal of Physics*, 49(6):846–858.
- Garrappa, R. (2018). Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial. *Mathematics*, 6(2).
- Guerrero-Arroyo, E. A. (2015). *Un método numérico de volúmenes de control y funciones de base radial para la solución numérica de la ecuación fraccional de Schrödinger*. PhD thesis, CIMAT.
- Huang, L., Chen, Q., Lai, Y.-C., and Pecora, L. M. (2009). Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems. *Phys. Rev. E*, 80:036204.
- Jafari, S., Sprott, J., and Golpayegani, S. M. R. H. (2013). Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria. *Physics Letters A*, 377(9):699 – 702.
- Kiani-B, A., Fallahi, K., Pariz, N., and Leung, H. (2009). A chaotic secure communication scheme using fractional chaotic systems based on an extended fractional Kalman filter. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(3):863–879.
- Kim, J.-H., Park, C.-W., Kim, E., and Park, M. (2005). Fuzzy adaptive synchronization of uncertain chaotic systems. *Physics Letters A*, 334(4):295–305.
- Kingni, S. T., Kuate, G. F., Kengne, R., Tchitnga, R., and Wofo, P. (2017). Analysis of a No Equilibrium Linear Resistive-Capacitive-Inductance Shunted Junction Model, Dynamics, Synchronization, and Application to Digital Cryptography in Its Fractional-Order Form. *Complexity*, 2017:1–12.
- Kiseleva, M. A., Kudryashova, E. V., Kuznetsov, N. V., Kuznetsova, O. A., Leonov, G. A., Yuldashev, M. V., and Yuldashev, R. V. (2018). Hidden and self-excited attractors in Chua circuit: synchronization and SPICE simulation. *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, 33(5):513–523.
- Kumar, S., Singh, C., Prasad, S. N., Shekhar, C., and Aggarwal, R. (2019). Synchronization of fractional order Rabinovich-Fabrikant systems using sliding mode control techniques. *Archives of Control Sciences*, 29(2):307–322.

- Kuznetsov, N. V., Leonov, G. A., Mokaev, T. N., and Seledzhi, S. M. (2016). Hidden attractor in the Rabinovich system, Chua circuits and PLL. *AIP Conference Proceedings*, 1738.
- Lauvdal, T., Murray, R. M., and Fossen, T. I. (1997). Stabilization of integrator chains in the presence of magnitude and rate saturations; a gain scheduling approach. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 4(December):4004–4005.
- Li, R. G. and Wu, H. N. (2019). Adaptive synchronization control with optimization policy for fractional-order chaotic systems between 0 and 1 and its application in secret communication. *ISA Transactions*, (xxxx).
- Lian, K. Y., Chiang, T. S., Chiu, C. S., and Liu, P. (2001a). Synthesis of fuzzy model-based designs to synchronization and secure communications for chaotic systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 31(1):66–83.
- Lian, K. Y., Chiu, C. S., Chiang, T. S., and Liu, P. (2001b). LMI-based fuzzy chaotic synchronization and communications. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(4):539–553.
- Lin, T.-C. and Lee, T.-Y. (2011). Chaos Synchronization of Uncertain Fractional-Order Chaotic Systems With Time Delay Based on Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(4):623–635.
- Liu, H., Pan, Y., Li, S., and Chen, Y. (2017). Adaptive Fuzzy Backstepping Control of Fractional-Order Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 47(8):2209–2217.
- Marquez, H. J. (2003). *Nonlinear control systems: analysis and design*, volume 1. Wiley-Interscience Hoboken.
- Matignon, D. (1996). Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *IMACS, IEEE-SMC*.
- Muthukumar, P., Balasubramaniam, P., and Ratnavelu, K. (2016). T–S fuzzy predictive control for fractional order dynamical systems and its applications. *Nonlinear Dynamics*, 86(2):751–763.
- Muthukumar, P., Balasubramaniam, P., and Ratnavelu, K. (2018). Sliding mode control for generalized robust synchronization of mismatched fractional order dynamical systems and its application to secure transmission of voice messages. *ISA Transactions*, 82:51–61.
- Nguyen, N. T. (2018). *Lyapunov Stability Theory*, pages 47–81. Springer International Publishing, Cham.
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, Madrid, España, 5 edition. ISBN: 978-84-8322-660-5.

- Ouannas, A., Azar, A. T., and Vaidyanathan, S. (2017a). A new fractional hybrid chaos synchronisation. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 27(4):314–322.
- Ouannas, A., Azar, A. T., and Vaidyanathan, S. (2017b). A robust method for new fractional hybrid chaos synchronization. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(5):1804–1812.
- Ouannas, A., Bendoukha, S., Volos, C., Boumaza, N., and Karouma, A. (2019). Synchronization of Fractional Hyperchaotic Rabinovich Systems via Linear and Nonlinear Control with an Application to Secure Communications. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17(9):2211–2219.
- Ouannas, A., Wang, X., Pham, V.-T., Grassi, G., and Ziar, T. (2018). Coexistence of identical synchronization, antiphase synchronization and inverse full state hybrid projective synchronization in different dimensional fractional-order chaotic systems. *Advances in Difference Equations*, 2018(1):35.
- Özkaynak, F. (2018). Brief review on application of nonlinear dynamics in image encryption. *Nonlinear Dynamics*, 92(2):305–313.
- Parker, T. S. and Chua, L. O. (1989). *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag.
- Pham, V. T., Kingni, S. T., Volos, C., Jafari, S., and Kapitaniak, T. (2017a). A simple three-dimensional fractional-order chaotic system without equilibrium: Dynamics, circuitry implementation, chaos control and synchronization. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 78:220–227.
- Pham, V. T., Ouannas, A., Volos, C., and Kapitaniak, T. (2018). A simple fractional-order chaotic system without equilibrium and its synchronization. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 86(January):69–76.
- Pham, V.-T., Vaidyanathan, S., and Jafari, C. K. V. . S. (2015). Hidden attractors in a chaotic system with an exponential nonlinear term. *The European Physical Journal Special Topics*, 224:1507 – 1517.
- Pham, V.-T., Volos, C., and Kapitaniak, T. (2017b). *Introduction*, pages 1–19. Springer International Publishing, Cham.
- Robinson, J. C. (2004). *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Cambridge University Press. DOI: 0.1017/CBO9780511801204.
- Shinners, S. M. (1978). *Modern Control, System Theory and Application*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., USA, 2nd edition.
- Smith, L. (2007). *Chaos: a very short introduction*, volume 159. Oxford University Press. ISBN: 978-0-19-285378-3.

- Sprott, J. C. and Sprott, J. C. (2003). *Chaos and time-series analysis*, volume 69. Oxford University Press.
- Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H. O. (1998). A unified approach to controlling chaos via an lmi-based fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 45(10):1021–1040.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis (2nd Ed.)*. Prentice-Hall, Inc., USA.
- Wang, B., Cao, H., Wang, Y., and Zhu, D. (2015). Linear Matrix Inequality Based Fuzzy Synchronization for Fractional Order Chaos. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.
- Wang, B., Xue, J., and Chen, D. (2016). Takagi-Sugeno fuzzy control for a wide class of fractional-order chaotic systems with uncertain parameters via linear matrix inequality. *JVC/Journal of Vibration and Control*, 22(10):2356–2369.
- Wang, S. Y., Zhao, J. F., Wang, X. Y., and Zhang, L. T. (2019a). Cartoon Image Encryption Algorithm by a Fractional-Order Memristive Hyperchaos. *Journal of Electrical and Computer Engineering*, 2019.
- Wang, X.-y., He, Y.-j., and Wang, M.-j. (2009). Chaos control of a fractional order modified coupled dynamo system. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(12):6126 – 6134.
- Wang, Z., Liu, J., Zhang, F., and Leng, S. (2019b). Hidden Chaotic Attractors and Synchronization for a New Fractional-Order Chaotic System. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 14(8):1–11.
- Wei, Z. (2011). Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria. *Physics Letters A*, 376(2):102 – 108.
- Weng, T., Yang, H., Gu, C., Zhang, J., and Small, M. (2019). Synchronization of chaotic systems and their machine-learning models. *Physical Review E*, 99(4):1–7.
- Wu, X., Wang, H., and Lu, H. (2012). Modified generalized projective synchronization of a new fractional-order hyperchaotic system and its application to secure communication. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 13(3):1441–1450.
- Yan, C., Hongjun, H., Chenhui, L., and Guan, S. (2019a). Finite time synchronization for fractional order Sprott C systems with hidden attractors. *Complexity*, 2019.
- Yan, C., Hongjun, H., Chenhui, L., and Guan, S. (2019b). Finite time synchronization for fractional order Sprott C systems with hidden attractors. *Complexity*, 2019.
- Zaqueros-Martinez, J. (2018). Simulaciones numéricas de sistemas dinámicos caóticos oscilatorios que conservan su caos. Master’s thesis, INAOE.



- Zelinka, I. (2016). Evolutionary identification of hidden chaotic attractors. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 50:159–167.
- Zhang, F., Chen, G., Li, C., and Kurths, J. (2013). Chaos synchronization in fractional differential systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1990).
- Zhang, H., Liao, X., and Yu, J. (2005). Fuzzy modeling and synchronization of hyperchaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 26(3):835–843.
- Zhang, H., Liu, D., and Wang, Z. (2009). *Synchronizing Chaotic Systems Based on Fuzzy Models*, pages 269–307. Springer London, London.
- Zhang, R., Liu, Y., and Yang, S. (2019). Adaptive synchronization of fractional-order complex chaotic system with unknown complex parameters. *Entropy*, 21(2).
- Zhao Ling-Dong Hu Jian-Bing, B. Z.-H. Z. G.-A. X. C. Z. S.-B. (2011). A finite-time stable theorem about fractional systems and finite-time synchronizing fractional super chaotic lorenz systems. *Acta Physica Sinica*, 60(10):100507.
- Zheng, G., Liu, L., and Liu, C. (2019). Hidden Coexisting Attractors in a Fractional-Order System without Equilibrium: Analysis, Circuit Implementation, and Finite-Time Synchronization. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019.
- Zheng Guang-Chao Liu Chong-Xin, W. Y. (2018). Dynamic analysis and finite time synchronization of a fractional-order chaotic system with hidden attractors. *Acta Physica Sinica*, 67(5):50502.
- Zhou, P. and Zhu, P. (2017). A practical synchronization approach for fractional-order chaotic systems. *Nonlinear Dynamics*, 89(3):1719–1726.
- Zhou, Y., Liu, H., Cao, J., and Li, S. (2019a). Composite learning fuzzy synchronization for incommensurate fractional-order chaotic systems with time-varying delays. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, (December 2018).
- Zhou, Y., Wang, H., and Liu, H. (2019b). Generalized Function Projective Synchronization of Incommensurate Fractional-Order Chaotic Systems with Inputs Saturation. *International Journal of Fuzzy Systems*, 21(3):823–836.